Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Національний університет "Львівська політехніка"
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

Диференціальні рівняння і аналіз даних

8 – 9 травня, 2025, Львів, Україна

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Львів – 2025

Ministry of Education and Science of Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv
National University "Lviv Polytechnic"
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine

SCIENTIFIC CONFERENCE

Differential Equations and Data Analysis

Lviv 2025

(DEDAL-2025)

8 – 9 May, 2025, Lviv, Ukraine

BOOK OF ABSTRACTS

Lviv 2025

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І АНАЛІЗ ДАНИХ

8 – 9 травня, 2025, Львів, Україна

ОРГАНІЗАТОРИ КОНФЕРЕНЦІЇ

– Міністерство освіти і науки України
– Львівський національний університет імені Івана Франка
– Національний університет “Львівська політехніка”
– Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

Бак С.М., Бігун Я.Й., Бокало М.М., Бугрій О.М., Головатий Ю.Д., Гринів Р.О., Гринькевич О.С., Дороговцев А.А., Євтухов В.М., Єлейко Я.І., Ільків В.С., Каленюк П.І., Кирилич В.М., Кміть І.Я., Кобилинська Т.В., Копитко Б.І., Лопушанська Г.П., Мельник Т.А., Пелих В.О., Притула Я.Я., Пукальський І.Д., Пукач П.Я., Розора І.В., Скрипнік І.І., Чабанюк Я.М.

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Бугрій О.М. (голова), Ярова О.А. (вчений секретар), Базилевич І.Б., Бак С.М., Бокало М.М., Бокало Т.М., Венгерський П.С., Власов В.А., Головатий Ю.Д., Головенко А.І., Грабчак Г.Є., Гуран І.Й., Гутік О.В., Добосевич О.М., Єлейко Я.І., Жерновий К.Ю., Жерновий Ю.В., Кирилич В.М., Кобилинська Т.В., Лисецький Т.Б., Лопушанська Г.П., Пелих В.О., Пукач П.Я., Рябов Г.В., Сендрій О.В., Симотюк М.М., Ткачук В.О., Химич О.А., Холявка О.Т., Шувар Р.Я.

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ТЕОРІЯ ОПЕРАТОРІВ

ON EXPONENTIAL DECAY OF SOLITARY TRAVELING WAVE SOLUTIONS TO THE FERMI-PASTA-ULAM-TYPE SYSTEMS ON 2D LATTICE

Serhii M. Bak [1] **, Halyna M. Kovtoniuk** [2]

[1,2] *Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University Vinnytsia, Ukraine*

e-mail: [1] sergiy.bak@gmail.com, [2] galyna.kovtonyuk@gmail.com

We consider the Fermi-Pasta-Ulam-type systems that describe the dynamics of an infinite systems of nonlinearly coupled identical particles on a two dimensional lattice:

$$\ddot{q}_{n,m} = W_1'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - W_1'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) +$$
$$+ W_2'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - W_2'(q_{n,m} - q_{n,m-1}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1}$$

where $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ is a coordinate of the (n,m)-th particle at time t, W_1 and W_2 are the potentials of interaction.

A traveling wave solution of Eq. (1) is a function of the form

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct). \tag{2}$$

We consider solitary traveling wave solutions, whose profile $u(s)$ satisfies the following condition:

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{3}$$

By the Paley-Wiener Theorem, the exponential estimate for the profiles of such solutions is obtained.

1. Bak S.M., Kovtonyuk G.M. *Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice*. J. Math. Sci., 2021, **252** (4), 453-462.
2. Bak S.M., Kovtoniuk H.M. *Exponential decay of solitary traveling wave solutions to the Fermi-Pasta-Ulam-type systems on 2D lattice*. Ukr. Math. Bull. 2025.

AVERAGING IN MULTI-FREQUENCY SYSTEMS WITH ARGUMENT DELAY AND A HIERARCHY OF AMPLITUDE AND PHASE VARIABLES

Yaroslav Y. Bihun[1], **Ihor D. Skutar**[2], **Andriy V. Drobot**[3]

[1,2,3] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University Chernivtsi, Ukraine*

e-mail: [1] y.bihun@chnu.edu.ua, [2] i.skutar@chnu.edu.ua

A system of differential equations with delay with $a \in D \subset R^n$ amplitude and $\varphi \in T^n$ phase variables of the form

$$\frac{da_\nu}{dt} = \varepsilon^{\kappa_\nu} X_\nu(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi_\nu}{dt} = \omega_\nu(\tau) + \varepsilon^{\kappa_\nu} Y_\nu(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) \qquad (1)$$

is investigated by means of the averaging method. Here the small parameter $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau = \varepsilon t \geq 0$, $0 < \kappa_1 \leq \cdots \leq \kappa_n$,
$a_\Lambda(\tau) = \Big(a(\lambda_1\tau), \ldots, a(\lambda_p\tau)\Big)$, $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_p \leq 1$,
$\varphi_\Theta(\tau) = \Big(\varphi(\theta_1\tau), \ldots, \varphi(\theta_q\tau)\Big)$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q \leq 1$.

The system of equations (1) is a generalization of multi-frequency systems that were studied in [1], when $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. The averaging method for systems of the form (1) with the asymptote ε^{κ_1} for amplitude variables and ε^{κ_2} – phase variables is justified in [2].

For components with number ν, $\nu = \overline{1, n}$, and a sufficiently small $\varepsilon_0 > 0$, an estimation of the averaging method of order $\varepsilon^{\kappa_\nu / nq}$ on time intervals $[0, \varepsilon^{-\kappa_\nu}]$ respectively is obtained in this work.

1. Bihun Ya., Skutar I. *Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay.* Acta et Commentationes. Exact and Natural Sciences. 2023; 2 (16): 13-24.
2. Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. *Averaging in a generalized multifrequency system with a delay.* Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Springer Nature Switzerland AG, 2025.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS WITH SLOWLY VARYING DERIVATIVES TO ONE CLASS OF NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Maria O. Bilozerova
I.I. Mechnikov National University of Odesa
Odesa, Ukraine
e-mail: marbel@ukr.net

Differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t) \exp(R(y, y')), \tag{1}$$

where $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, the function $R : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ is continuously differentiable, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either $[y_i^0, Y_i[$[1] or $]Y_i, y_i^0]$ is considered. Moreover, the function R satisfy the condition

$$\lim_{\substack{(y_0,y_1)\to(Y_0,Y_1)\\(y_0,y_1)\in\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}}} R(y_0, y_1) = +\infty, \quad \lim_{\substack{y_i\to Y_i\\y_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{y_i R'(y_i)}{R(y_i)} = \gamma_i, \quad i = 0, 1.$$

Here the function R is in some sense near to regularly varying functions, that are useful for investigations of equations of such a type. Some classes of regularly varying solutions to the equation (1) were established in [1]. For one class of regularly varying solutions with slowly varying derivatives necessary and sufficient conditions of existence and asymptotic representations for such solutions and their first order derivatives were found.

1. Bilozerova M.O. *Asymptotic behavior of solutions to second order with nonlinearities, that are compositions of exponential and regularly varying functions.* Bukovinian Math. J. 2023; 11 (2): 33-40.

[1]As $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) assume $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$).

INVERSE INITIAL PROBLEM FOR A TIME-FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION

Petro I. Boyko [1], **Andriy O. Lopushansky** [2], **Halyna P. Lopushanska** [3], **Petro Ya. Pukach** [4]
[1,4] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine,*
[2] *Rzeszów University, Rzeszów, Poland,*
[3] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*
e-mail: [1] boyko.petro@gmail.com, [2] alopushanskyj@gmail.com, [3] lhp@ukr.net, [4] Petro.Y.Pukach@lpnu.ua

Let $S(\mathbb{R}^n)$ be a space of infinitely differentiable functions v in $\mathbb{R}^n$ such that $x^\gamma D^\alpha v$ are bounded in $\mathbb{R}^n$ for all multi-indexes α, γ (the Schwartz space of smooth rapidly decreasing functions),

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \le C_{\alpha,\epsilon}(v) e^{-(a-\epsilon)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\alpha,\ \forall\epsilon > 0\} = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,(a)} =$$
$$= \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^\alpha v(x)| < +\infty\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ne 1\}.$$

Let $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$. We say that $v \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ if $v \in C(\bar{Q})$ and $v(\cdot,t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ for all $t \in [0,T]$.

For $\beta \in (1,2)$ we study the inverse problem

$${}^cD_t^\beta u - \Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)dt = \Phi_1(x),\ \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_2(t)dt = \Phi_2(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

of determining the triple $(u, F_1, F_2) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ where Φ_1, Φ_2, F_0, η_1, η_2 are the given functions, ${}^cD_t^\beta u$ is the Caputo fractional derivative of order β of the function u.

We find sufficient conditions for the unique solvability of the problem.

INITIAL INVERSE PROBLEM FOR A TIME-FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Petro I. Boyko[1], **Yaroslav R. Hedza**[2], **Halyna P. Lopushanska**[3]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

[2,3] *Ivan Franko National University of Lviv*

Lviv, Ukraine

e-mail: [1] boyko.petro@gmail.com, [2] yarik77777771@gmail.com,

[3] lhp@ukr.net

For $\beta \in (0,1)$ we study the inverse problem

$$^{c}D_t^{\beta} u - \Delta u = F_0(x,t), \quad (x,t) \in Q := \mathbb{R}^n \times (0,T],$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta(t)\,dt = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

of determining the pair $(u, F_1) \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, where Φ, F_0, η are the given functions, $^{c}D_t^{\beta} u$ is the Caputo fractional derivative of order β of the function u, $S(\mathbb{R}^n)$ is the Schwartz space of smooth rapidly decreasing functions at infinity,

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^{\alpha} v(x)| \le C_{\alpha,\epsilon}(v) e^{-(a-\epsilon)|x|^{\frac{1}{\gamma}}},$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha,\ \forall\, \epsilon > 0\} = \{v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : ||v||_{k,(a)} =$$
$$= \sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{\frac{1}{\gamma}}} |D^{\alpha} v(x)| < +\infty\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \ne 1\},$$

and we say that $v \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ if $v \in C(\bar{Q})$ and $v(\cdot,t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ for all $t \in [0,T]$.

Theorem 1. Let $\gamma \ge 1$, $0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \le c < (2-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta}}{4}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$, $F_0 \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$, $\Phi \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $\eta \in C^1[0,T]$, is a monotone increasing positive function and $\eta(0) \ne 0$. Then there exists $T_0 > 0$ and for each $T \in (0,T_0]$ the unique solution $u \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ of the initial inverse problem.

DATA-DRIVEN REGULARIZATION TECHNIQUES FOR STOCHASTIC REDUCED-ORDER INVERSE PROBLEMS

Dmytro Bobyliev
State Pedagogical University of Kryvyi Rih
Kryvyi Rih, Ukraine
e-mail: dmytrobobyliev@gmail.com

This research enhances reduced-order modeling to improve the robustness of solving inverse problems governed by stochastic partial differential equations, addressing challenges from ill-posedness and measurement noise despite efficient surrogate modeling.

We consider forward models of the form:

$$\mathcal{L}(u(x,t;\boldsymbol{\phi})) = f(x,t;\boldsymbol{\phi}), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T],$$

where $\mathcal{L}$ is a spatial-temporal differential operator, u is the system state, and $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^d$ is a vector of uncertain and/or unknown parameters. For inverse reconstruction, we introduce a regularized cost functional:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\phi}) = \tfrac{1}{2}\|R_{\text{mes}} - R_{\text{sim}}(\boldsymbol{\phi})\|^2 + \alpha\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi}),$$

where R_{mes} is the measured response, R_{sim} is the predicted response from the surrogate model, $\alpha > 0$ is a regularization weight, and $\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi})$ is a regularization term. We investigate both classical Tikhonov regularization $\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi}) = \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0\|^2$, and sparsity-inducing penalties such as $\mathcal{R}(\boldsymbol{\phi}) = \|\boldsymbol{\phi}\|_1$.

To improve the reduced-order model (ROM) construction, we propose a regularized snapshot selection strategy that penalizes redundancy and favors diversity in the parameter space. The POD basis functions $\{\varphi_i(x)\}$ are constructed from a snapshot matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, and regularization is introduced during singular value truncation to control overfitting. Preliminary results on synthetic elasticity problems show that regularized ROMs reduce noise sensitivity and improve parameter recovery, while preserving computational efficiency and enhancing stability.

EVOLUTIONARY VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE TIME-DELAY IN TIME UNBOUNDED DOMAINS

Mykola M. Bokalo[1], **Olga V. Ilnytska**[2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] mm.bokalo@gmail.com, [2] ol.ilnytska@gmail.com

Let T be a real number, V be a reflexive and separable Banach space, and H be a separable Hilbert spaces. Suppose that $V \subset H$ with dense, continuous and compact injection. Let V' be the dual spaces to V.

Let $\Phi : V \to (-\infty, +\infty]$ be a proper convex lower semicontinuous functional, and let $\tau : (-\infty, T] \to \mathbb{R}$ be a bounded function such that $\tau \in C((-\infty, T])$, $\tau(t) \geq 0$ for all $t \in (-\infty, T]$, and let $c : \Pi_\tau \times H \to H$, where $\Pi_\tau := \{(t,s) \mid t \leq T,\ t-\tau(t) \leq s \leq t\}$, be a function, which satisfies the condition: there exists a constant $L \geq 0$ such that inequality $|c(t,s,v_1) - c(t,s,v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$ for a.e. $(t,s) \in \Pi_\tau$ and for all $v_1, v_2 \in H$ holds; in addition, $c(t,s,0) = 0$ for a.e. $(t,s) \in \Pi_\tau$.

We consider the problem of finding a solution u of evolutionary variational inequality

$$u'(t) + \partial\Phi\big(u(t)\big) + \int_{t-\tau(t)}^{t} c(t,s,u(s))\,ds \ni f(t), \quad t \in (-\infty, T],$$

such that

$$\int_S |u(t)|^2\,dt < +\infty, \quad \text{that is} \quad u \in L^2(S;H),$$

where $f : (-\infty, T] \to V'$ is a given measurable function,
$\partial\Phi : V \to 2^{V'}$ is the *subdifferential* of functional Φ,
and $u : (-\infty, T] \to V$ is an unknown function.

Under additional conditions for the data-in of the problem under study, the existence of a unique solution, as well as an estimate of this solution, was obtained.

METHOD OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THE HEAT PROPAGATION FROM LATERAL CAUCHY DATA

Ihor Borachok[1], **Roman Chapko**[2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] ihor.borachok@lnu.edu.ua,
[2] roman.chapko@lnu.edu.ua

Let D be a double-connected domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with boundaries Γ_1 (inner) and Γ_2 (outer). We consider the ill-posed initial boundary value problem for the heat equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{in } D \times [0, T], \\ u = f_2,\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_2 & \text{on } \Gamma_2 \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{in } D, \end{cases} \tag{1}$$

where f_2, g_2 are given smooth functions, $\boldsymbol{\nu}$ is the outward unit normal to the Γ_2 and $T > 0$ is the final time. Using either the Laguerre transform or Rothe's method, the problem (1) is reduced to a sequence of Cauchy problems for the modified Helmholtz equation. According [1], the elements of the sequence are approximated as follows

$$u_n(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=1}^{M} \alpha_{m,j} \Phi_{n-m}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_j),\ \boldsymbol{x} \in D,\ n = 0, \ldots, N, \tag{2}$$

where $N, M \in \mathbb{N}$, $\{\Phi_n\}$ is the known fundamental sequence, $\boldsymbol{y}_j \notin \overline{D}$ are selected source points and coefficients $\alpha_{m,j}$ are determined by the collocation method. Tikhonov regularization with the L-curve technique is applied to the final linear systems.

1. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. *A method of fundamental solutions for heat and wave propagation from lateral Cauchy data.* Numer. Algor. 2022; 89: 431-449.

НАРИСИ З ІСТОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У ЛЬВІВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Олег М. Бугрій[1], **Ярослав І. Єлейко**[2]
[1,2] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
Львів, Україна
e-mail: [1] oleh.buhrii@lnu.edu.ua, [2] yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua

Розглянемо основні етапи становлення та розвитку теорії диференціальних рівнянь і математичної статистики на механіко-математичному факультеті Львівського національного університету імені Івана Франка. Згадаємо про персоналії, завдяки яким цей процес тривав.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Alla V. Vorobiova
I.I. Mechnikov National University of Odesa
Odesa, Ukraine
e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua

Differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t) f(t, y, y'), \tag{1}$$

where $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \le +\infty$) is a continuous function, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ is continuously differentiable, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either $[y_i^0, Y_i[$[1] or $]Y_i, y_i^0]$ is concidered. We also suppose the function f satisfy the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \gamma \text{ uniformly by } v_0 \in \Delta_{Y_0},\ v_1 \in \Delta_{Y_1}, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{y_k \to Y_k \\ y_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \sigma_k \quad \text{uniformly by} \quad t \in [a, \omega[, \tag{3}$$

where $v_j \in \Delta_{Y_j}$, $j \ne k$, $k \in \{0, 1\}$.

By conditions (2), (3) the function f is in some sense close to regularly varying function by every variable. Partial cases of (1) were considered for example in [1]. For one class of regularly varying solutions to the equation (1) asymptotic representations and conditions of existence were found.

1. Bilozerova M., Herzhanovs'ka H.A. *Asymptotic Behavior of the Solutions of Essentially Nonlinear Nonautonomous Second-Order Differential Equations Close to Linear Functions.* J. Math. Sci. 2023; 274 (1): 1-12.

[1]As $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) assume $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$).

LAX TYPE FLOWS IN THE DUAL SPACE TO THE CENTRALLY EXTENDED LIE ALGEBRA OF MATRIX SUPER-INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS AND THEIR RATIONAL FACTORIZATION

Oksana Ye. Hentosh
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
e-mail: ohen@ukr.net

The Lie algebra of matrix super-integro-differential operators with respect to one anticommuting variable has been introduced by the author to construct Lax integrable hierarchies of nonlinear dynamical systems on supermatrix-valued supermanifolds of one commuting and one anticommuting independent variables as well as the systems on supermatrix-valued supermanifolds of two commuting and one anticommuting ones, possessing triple Lax type linearizations, for certain type its coadjoint orbits.

In the report, which is proposed, one considers the central extension of the mentioned above operator Lie algebra and develops a new Lie-algebraic method for constructing Lax integrable hierarchies on supermatrix-valued supermanifolds of two commuting and one anticommuting independent variables by use of the hierarchy of Hamiltonian flows in its dual space, generated by the corresponding $\mathcal{R}$-deformed Lie-Poisson bracket and Casimir invariants. The problem of the rational factorization [1] for this Hamiltonian hierarchy is also studied in order to obtain new integrable hierarchies of nonlinear dynamical systems on such type supermanifolds.

1. Hentosh O., Prykarpatski A. *Rational factorization of Hamiltonian flows in the space dual to the Lie algebra of fractional integrodifferential operators and integrable Benney-type hydrodynamic systems.* J. Math. Sci. 2024; 279 (3): 308-329.

ЗАДАЧІ З “АНОМАЛЬНИМИ” ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ДЛЯ 1D ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Олександр Гнатюк [1], **Володимир Кирилич** [2], **Ольга Пелюшкевич** [3]

[1,2,3] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

e-mail: [1] gnatyksasha@gmail.com, [2] vkyrylych@ukr.net, [3] olpelushkevych@gmail.com

Відомо, що система рівнянь

$$A(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + K(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = g(x,t,u),$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n)^\top$, $g = (g_1, \ldots, g_n)^\top$, A, K – квадратні матриці порядку n (A – невироджена), називається гіперболічною, якщо всі власні значення матриці $A^{-1}K$ дійсні і вона зводиться до діагонального виду.

Достатньою умовою діагоналізації матриці є неспівпадіння всіх її власних значень $\lambda_1(x,t,u), \ldots, \lambda_n(x,t,u)$, які визначають характеристики системи. Зазвичай саме цей випадок найбільше зустрічається. Однак, багато математичних моделей природознавства та техніки приводять до “аномальних”, т.т. нестандартних випадків характеристик гіперболічних задач, зокрема, кратних та ортогональних до осей координат [1].

У доповіді буде представлено задачі для гіперболічних рівнянь з вказаними характеристиками, відзначено їхній вплив на коректну розв’язність відповідних задач, побудову глобальних розв’язків та їхнє застосування. Розглядається також випадок зліченних систем.

1. Goliforushani S., Xie M., Balakrishman N. *On the Mean Residual Life of a Generalized* k*-out-of-*n *System.* Common in Statistics. Theory and Meth. 2018; 47 (10): 2362-2372.

QUANTUM GRAPHS AND EXACTLY SOLVABLE MODELS FOR COULOMB-TYPE POTENTIALS

Yuriy Golovaty
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: yuriy.golovaty@lnu.edu.com

We construct exactly solvable models for some non-relativistic quantum processes in branched structures. The main object of the study is Schrödinger operators on non-compact star graphs with the Coulomb-type potentials having singularities at vertices. The convergence of regularized Hamiltonians H_ε with cut-off Coulomb potentials coupled with $(\alpha\delta + \beta\delta')$-like ones is studied. The 1 D Coulomb potentials and the δ'-potentials are very sensitive to their regularization method. Our analysis of the Coulomb Hamiltonian can be seen as a continuation of our previous works, where we have found conditions of the norm resolvent convergence of H_ε on the line and have constructed the solvable models for the one-dimensional hydrogen atom. The conditions of the norm resolvent convergence of H_ε on star graphs depending on the regularization are established. The limit Hamiltonians give a mathematically precise meaning to the Schrödinger operators with the Coulomb-type potentials, ensuring the physically motivated choice of vertex conditions. We also describe all self-adjoint realizations of the formal Coulomb Hamiltonians on the star graph.

1. Golovaty Y. *Quantum graphs: Coulomb-type potentials and exactly solvable models.* Ann. Henri Poincaré. 2023; 24: 2557-2585. https://doi.org/10.1007/s00023-023-01270-9

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННОГО НЕАВТОНОМНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ЗІ ШВИДКОЗМІННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ В ОСОБЛИВОМУ ВИПАДКУ

Сергій Голубєв

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Одеса, Україна

e-mail: [1] sergii.golubev@stud.onu.edu.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0 : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, Y_0 дорівнює або 0, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0. Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умовам які визначені в [1]. Метою праці є вивчення питання про існування та асимптотичну поведінку $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0 = 1$. Позначення для наступної теореми наведено в [1].

Теорема 1. Для існування $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків рівняння (1) необхідно виконання наступних умов $\nu_1 \mu_0 J_0(t) < 0$ при $t \in]a, \omega[$, $\alpha_0 \nu_1 < 0$ якщо $Y_0 = 0$, $\alpha_0 \nu_1 > 0$ якщо $Y_0 = \pm\infty$, і умов при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\alpha_0 J_3(t)}{\Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t))} \sim \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \sim \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} \sim \frac{J_3'(t)}{J_3(t)} \sim \frac{(\Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t)))'}{\Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t))}, \tag{2}$$

та $\lim\limits_{t\uparrow\omega} H(t) = \pm\infty$, $\nu_1 \lim\limits_{t\uparrow\omega} J_0(t) = Z_0$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(\Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t)))'}{\Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t)))} = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty$. Крім того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ виконується таке: $y(t) = \Phi^{-1}(\nu_1 J_0(t))[1 + \frac{o(1)}{H(t)}]$,

$y'(t) = \alpha_0 J_3(t)[1 + o(1)]$, $y''(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + o(1)]$,

$y'''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)]$.

1. Євтухов В.М., Голубєв С.В. *Про асимптотику розв'язків одного класу істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь.* Нелін. коливання. 2024; 27 (3): 322-345.
2. Черникова А.Г. Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Одеса, 2019.

GRADIENT OSCILLATOR MODEL FOR FRUSTRATED SPIN SYSTEM

Anastasiia Hrabovets [1], **Oleksandr Burylko** [2]
[1,2] *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*
Kyiv, Ukraine
[2] *Institut für Mathematik of Humboldt-Universität zu Berlin*
Berlin, Germany
e-mails: [1] a.hrabovets@imath.kiev.ua, [2] burylko@yahoo.co.uk

We propose a gradient oscillator model to study the collective behavior of frustrated spin networks [1, 2]. The system is defined on a ring with attractive and repulsive couplings between nearest and next-nearest neighbors. Starting from a complex spin network, we reduce the model to a gradient-type Kuramoto system in terms of the angular coordinates with a circulant interaction matrix.

We study identical oscillators, identifying invariant manifolds and analyzing the stability of equilibria. For any number of oscillators, synchronization, splay states, and π-states are observed, along with more complex regimes. Degenerate bifurcations, induced by system symmetries, are identified, and perturbations of the natural frequencies result in symmetry-breaking bifurcations.

Future work includes interpreting the results in terms of energy optimization and extending the model to two-dimensional spin networks [1].

1. Ginster J., Zwicknagl B. *Energy scaling law for a singularly perturbed four-gradient problem in helimagnetism.* J. Nonlinear Sci. 2023; 33 (20).
2. Ginster J., Koser M., Zwicknagl B. *Microstructures in a two-dimensional frustrated spin system: Scaling regimes and a discrete-to-continuum limit.* 2024. arXiv:2406.08339.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЗАДАЧІ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ЗІРКОВОМУ ГРАФІ З СИНГУЛЯРНИМИ ЗБУРЕННЯМИ ПОТЕНЦІАЛА ТА ГУСТИНИ

Геннадій Є. Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна

e-mail: hennadii.hrabchak@lnu.edu.ua

Нехай G – скінченний зірковий метричний граф з n ребрами і спільною вершиною a – центром зірки; $\partial G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множина кінцевих точок променів зірки. Граф G є природно вкладеним в $\mathbb{R}^2$ з індукованою з $\mathbb{R}^2$ метрикою. Розглянемо на G сингулярно збурену задачу Штурма-Ліувілля

$$-y_\varepsilon'' + W_\varepsilon y_\varepsilon = \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon y_\epsilon \ \text{ на } \ G, \quad y_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \partial G,$$

$$y_\varepsilon \ \text{ – неперервна в } \ a\,, \quad \sum_{i=1}^{n} y'_{\varepsilon,i}(a) = 0 \ \text{ (умова Кірхгофа).}$$

Тут λ^ε – спектральний параметр; $y_{\varepsilon,i}$ – звуження y_ε на i-те ребро графа. Потенціал W_ε має носій в ε-околі вершини a, в якому $W_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}U(\varepsilon^{-1}(x-a)) + \varepsilon^{-2}V(\varepsilon^{-1}(x-a))$, тобто є регуляризацією типу $\alpha\delta + \beta\delta'$. Функція ρ_ε є δ-подібним збуренням в тому ж околі додатної функції p на G: $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}q(\varepsilon^{-1}(x-a))$ поблизу a. В механічній інтерпретації задачі як задачі про власні коливання натягнутої в'язки струн ρ_ε має сенс лінійної густини.

Ми вивчаємо асимптотичні властивості при $\varepsilon \to 0$ спектра сформульованої задачі. Застосувавши запропоновані в [1] підходи, з'ясовуємо граничну при $\varepsilon \to 0$ задачу, досліджуємо її спектральні властивості і доводимо збіжність спектра вихідної задачі до спектра граничної.

1. Golovaty Yu. *Quantum Graphs: Coulomb-Type Potentials and Exactly Solvable Models.* Henri Poincare. 2023; 202324: 2557-2585. https://doi.org/10.1007/s00023-023-01270-9

INVERSE FREE BOUNDARY PROBLEM FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Nadiia M. Huzyk
Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy
Lviv, Ukraine
e-mail: hryntsiv@ukr.net

In a free boundary domain $\Omega_T = \{(x,t) \quad : \quad 0 < x < h(t)$, $0 < t < T\}$, where $h = h(t)$ is an unknown function, it is considered an inverse problem for simultaneous determination of the time dependent coefficients $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ in one-dimensional degenerate parabolic equation

$$u_t = t^{\beta} a(t) u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \qquad (1)$$

with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \qquad (2)$$

boundary conditions

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \qquad (3)$$

and integral overdetermination conditions

$$\int_0^{h(t)} x^i u(x,t)\, dx = \mu_3(t), \quad i = \overline{0,2}, \quad t \in [0,T]. \qquad (4)$$

It is known, that $a = a(t)$ is a strongly positive continuous function and degeneration of the equation (1) is caused by power function t^{β}. It is studied the case of weak degeneration while $0 < \beta < 1$. Using the apparatus of Green's functions for the heat equation and Schauder Fixed Point Theorem the existence of the local solution to the named problem is established. The proof of the uniqueness of the local solution to this problem is based on the properties of the solutions to the homogeneous integral equations with integrable kernels.

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКИХ ДО ЛІНІЙНИХ

В'ячеслав М. Євтухов

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна

e-mail: evtukhov@onu.edu.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна і повільно змінна при $y \to Y_0$ функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – однобічний окіл Y_0.

При $L(y) \equiv 1$ рівняння (1) є лінійним диференціальним рівнянням

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y, \tag{2}$$

асимптотична поведінка розв'язків якого при $t \to +\infty$ (випадок $\omega = +\infty$) достатньо повно досліджена (див., наприклад, монографію [1], Ch. 1, §6, p. 175-194). Згідно з означенням повільно змінної функції $L(y) = y^{0(1)}$ при $y \to Y_0$ і тому рівняння (1) при $y \to Y_0$ є асимптотично близьким до лінійного диференціального рівняння (2).

Для рівняння (1) встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків $(|\lambda_0| \leq +\infty)$.

1. Kiguradze I.T., Chanturia T.A *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Mathematics and its application (Mass Vol. 89). 1989.

ПРО НОВІ АЛГЕБРИЧНІ ФОРМИ УМОВИ ЛОПАТИНСЬКОГО

Володимир С. Ільків
Національний університет "Львівська політехніка"
Львів, Україна
e-mail: ilkivvv@i.ua

Дослідження загальних крайових задач для еліптичних за Петровським систем диференціальних рівнянь розпочато у роботах 50-х років минулого століття визначного українського вченого Я. Б. Лопатинського. Він записав умову, яка виділяє серед таких задач еліптичні крайові задачі (разом з умовою Лопатинського використовуються й інші її назви). Вона запроваджена також для систем еліптичних, параболічних, псевдодиференціальних тощо рівнянь і має різні форми запису, зокрема алгебричну. Від запису залежить простота перевірки цієї умови.

На компактному многовиді Ω розмірності n з краєм Γ розглядається крайова задача структури Дуґліса-Ніренберґа

$$Au = f \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \Gamma, \qquad Bu = g \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

де A – правильно еліптичний матричний диференціальний оператор з головною частиною символу $a_0(x,\xi)$, оператор B має розмір $s \times p$ і головну частину символу $b_0(x,\xi)$. Позначимо $a_0(z) = a_0(x,\tau + z\nu)$, $b_0(z) = b_0(x,\tau + z\nu)$, де $z \in \mathbb{C}$, $x \in \Gamma$, $\nu = \nu(x)$ і $\tau = \tau(x)$ — одиничні внутрішня нормаль і дотична.

Умова Лопатинського означає, що для довільного $h \in \mathbb{C}^s$ задача $a_0(d_t)v = 0$, $b_0(d_t)v|_{t=0} = h$ має єдиний стійкий розв'язок. Алгебричною формою є умова: рядки матриці $Q(z) = b_0(z)a^0(z)$ є лінійно незалежними по модулю $a_0^+(z){=}(z - z_1)\cdots(z - z_s)$, де $a^0(z)$ – приєднана матриця до $a_0(z)$, z_j – корені многочлена $\det a_0(z)$ з доданою уявною частиною (умова накриття).

Встановлено декілька нових версій умови Лопатинського, які формулюються за допомогою матриць П.С. Казімірського.

УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТИПУ ДІРІХЛЕ В УТОЧНЕНІЙ ШКАЛІ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА

Володимир С. Ільків[1]**, Ірина І. Волянська**[2]**,**
Наталія І. Страп[3]

[1,2,3] *Національний університет "Львівська політехніка"*
Львів, Україна
e-mail: [1] ilkivvv@i.ua, [2] iryna.i.volianska@lpnu.ua,
[3] nataliia.i.strap@lpnu.ua

У прямокутній області Q, яка є декартовим добутком часового $[0,T]$ і просторового $[0,\pi]$ відрізків, розглянуто випадок задачі типу Діріхле для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)\equiv\sum_{|s|\le n}a_{s_0,s_1}\frac{\partial^{2s}u(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x^{2s_1}}=0,$$

$$M_l u=\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\Big|_{t=0}=\varphi_l,\quad M_{n+l}u=\frac{\partial^{2l}u}{\partial t^{2l}}\Big|_{t=T}=\varphi_{n+l},$$
$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=0}=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=\pi}=0,$$
$$l=0,1,\ldots,n-1,\qquad m=0,1,\ldots,n-1,$$

де a_{s_0,s_1} – комплексні числа, $a_{n,0}=1$, причому $|s|=s_0+s_1$, n – натуральне число, $\varphi_0=\varphi_0(x)$, $\varphi_1=\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_{2n-1}=\varphi_{2n-1}(x)$ – задані функції на відрізку $[0,\pi]$, а $u=u(t,x)$ – шукана функція в області Q.

Досліджено умови коректної розв'язності даної задачі у просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї дійсної змінної. Ці умови алгебрично пов'язують коефіцієнти $a_{0,n}$, $a_{1,n-1}$, $\ldots$, $a_{n,0}$ диференціального рівнян-ня; вони виконуються для усіх (за вийнятком нульової міри) векторів, складених з цих коефіцієнтів.

SMOOTH PERIODIC SOLUTIONS TO QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS

Iryna Kmit
Humboldt University of Berlin,
Berlin, Germany
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Lviv, Ukraine
e-mail: kmit@hu-berlin.de

We provide conditions for the existence and uniqueness of classical time-periodic solutions to first order quasilinear 1D hyperbolic systems with (nonlinear) nonlocal boundary conditions. The boundary conditions cover different types of reflections from the boundary and integral operators with delays. In the first step we use a Lyapunov approach to derive sufficient conditions for the robust exponential stability of a linear(ized) homogeneous problem. Under these conditions and a number of non-resonance conditions, in the second step we prove the existence and uniqueness of smooth time-periodic solutions to the corresponding linear nonhomogeneous problems. In the third step, we prove a perturbation theorem stating that the periodic solutions survive under small perturbations of the coefficients of the hyperbolic system. In the last step, we apply the linear results to construct smooth time-periodic solutions to the quasilinear problems.

This is joint work with Viktor Tkachenko.

1. Kmit I., Tkachenko V. Lyapunov function and smooth periodic solutions to quasilinear 1D hyperbolic systems. In: *Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems*, Springer, 343-376 (2025).

SINC-CONVOLUTION METHOD FOR DIRICHLET PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION ON THE PLANE

Yurii Kozlovskyi [1], **Vasyl Vavrychuk** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] yurii.kozlovskyi@lnu.edu.ua,
[2] vasyl.vavrychuk@lnu.edu.ua

Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be a closed connected domain on the plane with boundary ∂D. In such a domain, we consider Dirichlet problem for Laplace equation. The solution could be represented [1] via the single-layer potential. By applying boundary condition $g \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ to the single-layer potential expression, we obtain an integral equation for the unknown density $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$

$$\int_{\partial D} \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y) = g(x), \qquad x \in \partial D. \tag{1}$$

Various numerical methods have been developed to solve the problem in the planar domain, e.g. trigonometric polynomial approximations. However, in case of a domain with singularities, such as corners or edges, traditional methods do not achieve satisfactory accuracy due to the behavior near them.

While trying to keep up with the target level of efficiency, sinc-approximation methods have advantages in their universality. The same method could be used for smooth boundaries or boundaries with corner and even open curves. Under the appropriate conditions, sinc methods achieve exponential convergence rates [2].

In this work we demonstrate the proposed sinc-convolution method to approximate the integral equation (1).

1. Kress R. *Linear Integral Equations, 3rd. ed.* New York: Springer-Verlag, 2014.
2. Stenger F. *Handbook of sinc numerical methods.* CRC Press, 2011.

INTEGRAL PROBLEM FOR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

Grzegorz Kuduk
University of Rzeszow
Rzeszow, Poland
e-mail: gkuduk@onet.eu

Let $H(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ be a class of entire functions on $\mathbb{R}$, K_L is a class of quasipolynomials of the form $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} Q_r(x) \exp[\alpha_r x]$, where $\alpha_r \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$, $Q_r(x)$ are given polynomials.

In the strip $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in \{(T_1,T_2) \cup (T_3,T_4), x \in \mathbb{R}^n\}$, we consider of the system of equations

$$\frac{\partial^n U_i}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{n-j} U_i}{\partial t^{n-j}} = 0, \tag{1}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} t^{n-j} U_i(t,x)\, dt + \int_{T_2}^{T_4} t^{n-j} U_i(t,x)\, dt = \varphi_{ik}(x),\ k = \{1,...,n\}. \tag{2}$$

Theorem. Let $\varphi_{ik}(x) \in K_L$, $i = \{1,...,n\}$, $j = \{1,...,n\}$. Then the class $K_{L \setminus P}$ exist and unique solution of the problem (1)-(2). Solution of the problem (1)-(2) can be represented in the form

$$U_i(t,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{n} \varphi_{kp} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \frac{1}{\eta(\lambda)} T_{kjp}(t,\lambda) W(t,\lambda) \exp[\lambda x] \right\} \Bigg|_{\lambda=0}.$$

Solution of problem (1)-(2) according to the differential-symbol method [1].

1. Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method.* Publishing House of Lviv Polytechnic National University. Lviv, 2002.

ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗІ ЗМІЩЕННЯМ ТА ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Ігор І. Куцевол[1]**, Олег М. Бугрій**[2]

[1,2] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

e-mail: [1] ihor.kutsevol@lnu.edu.ua, [2] oleh.buhrii@lnu.edu.ua

Нехай $T > 0$, $n, N \in \mathbb{N}$ – деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $\partial\Omega$ – межа Ω та $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$.

Шукатимемо вектор-функцію $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_N) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^N$, яка задовольняє такі співвідношення:

$$\widetilde{u}_t - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(A_{ij}(x,t) \big(\widetilde{u} + b(x,t) \big)_{x_i} \Big)_{x_j} +$$

$$+ G(x,t) \big| \widetilde{u} + b(x,t) \big|^{q(x,t)-2} \big(\widetilde{u} + b(x,t) \big) +$$

$$+ \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,y,t) \big(\widetilde{u} + b(y,t) \big) \, dy = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \qquad (1)$$

$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0, \qquad (2)$$

$$\widetilde{u}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \qquad (3)$$

Тут $A_{ij}, G, \mathfrak{Z}$ – квадратні матриці N-го порядку, b, F, u_0 – вектор-функції, $q = q(x,t)$ – змінний показник нелінійності системи (1).

Нехай $H_0^1(\Omega)$ – простір Соболєва, $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ – узагальнений простір Лебега, $U(Q_{0,T}) = L^2(0,T; [H_0^1(\Omega)]^N) \cap [L^{q(x,t)}(Q_{0,T})]^N$,

$$W(Q_{0,T}) = \{ u \in U(Q_{0,T}) \;\; | \;\; u_t \in [U(Q_{0,T})]^* \},$$

При певних умовах доведено теореми про існування та єдиність узагальненого розв'язку $\widetilde{u} \in W(Q_{0,T})$ задачі (1)-(3).

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДИСИПАТИВНОЮ ПАРАБОЛІЧНІСТЮ, ЗМІННИМИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ВІД'ЄМНИМ РОДОМ

Владислав А. Літовченко [1] **, Максим О. Лека** [2]

[1,2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*

e-mail: [1] v.litovchenko@chnu.edu.ua, [2] leka.maksym@chnu.edu.ua

Для диференціального рівняння з частинними похідними

$$\partial_t u(t;x) = \{A_0(t;i\partial_x) + A_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \quad (1)$$

в якому u – невідома функція, $\Pi_Q = \{(t;x) \; : \; t \in Q, \; x \in \mathbb{R}^n\}$, а $A_0(t;i\partial_x)$, $A_1(t,x;i\partial_x)$ – диференціальні вирази порядків відповідно p і p_1, розглядається задача Коші з початковою умовою

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in S'_\alpha, \quad (2)$$

де S'_α – простір розподілів Гельфанда і Шилова.

Вважається, що $A_0(t;i\partial_x)$ є $\{p;h\}$-параболічним на $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, родом $\mu < 0$, а порядок p_1 менший за h. Коефіцієнти рівняння (1) на множині $\Pi_{[0;T]}$ неперервні за t, нескінченно диференційовні за x і обмежені разом зі своїми похідними комплекснозначні функції.

Теорема. При $\alpha \geq 1/(1-\mu/h)$ задача Коші (1), (2) коректно розв'язна на множині $\Pi_{(0;T]}$. Її розв'язок є гладкою класичною функцією $u(t;x) =< f, Z(t,x;0,\cdot) >$, яка в звичайному розумінні задовольняє рівняння (1), а початкову умову (2) – у сенсі слабкої збіжності в просторі S'_α.

Функцію Гріна Z побудовано та досліджено в [1].

1. Litovchenko V., Kharyna D. *Green's Function of the Cauchy Problem for Equations with Dissipative Parabolicity, Negative Genus, and Variable Coefficients.* International Journal of Differential Equations. 2024, Vol. 2024. 18 p.

DENSE PLASTIC SUBGROUPS IN STRICTLY CONVEX NORMED SPACES

Oles V. Mazurenko[1], **Taras O. Banakh**[2], **Olesia O. Zavarzina**[3]

[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*
[3] *V.N. Karazin Kharkiv National University Kharkiv, Ukraine*

e-mail: [1] oles.mazurenko@lnu.edu.ua, [2] taras.banakh@lnu.edu.ua,
[3] olesia.zavarzina@yahoo.com

Definition. A metric space X is *plastic* if every non-expanding bijection $f : X \to X$ is an isometry.

We shall discuss the existence of a dense plastic subspace of a metric space, and a dense plastic subgroup of a normed space, as described in our following results.

Definition. A metric space (X, d) is *strictly convex* if for all $a, b \in X$ and $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ such that $d(a, b) = r_1 + r_2$, the intersection of the closed balls $B[a, r_1] \cap B[b, r_2]$ contains exactly one element.

Definition. A topological space Y is *analytic* if there exists a Polish (i.e., completely metrizable separable topological) space X and a continuous map $f : X \to Y$ such that $A = f(X)$.

Definition. A metric space is *crowded* if it has no isolated points.

Theorem 1. A crowded countable metric space is not plastic.

Theorem 2. An everywhere uncountable analytic metric space contains a dense plastic subspace.

Theorem 3. An analytic strictly convex normed vector space contains a dense plastic subgroup.

1. van Mill J. *A topological group having no homeomorphisms other than translations*. Trans. Amer. Math. Soc. 1983; 280 (2): 491-498.
2. Naimpally S.A., Piotrowski Z., Wingler E.J. *Plasticity in metric spaces*. J. Math. Anal. Appl. 2006; 313: 38-48.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Олександр Максимов

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Одеса, Україна

e-mail: 2162237@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = p_1(t)x^{\sigma_1} + q_1(t)e^{\lambda_1 y}, \\ y' = p_2(t)e^{\lambda_2 x} + q_2(t)y^{\sigma_2}, \end{cases} \tag{1}$$

де σ_i, λ_i – додатні сталі, $p_i, q_i : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ – неперервні функції ($i = 1, 2$).

Згідно з виглядом системи (1) кожна компоненти будь-якого розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (1) така, що виконується одна з двох умов

$$(I) \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = c > 0, \qquad \text{або} \quad (II) \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0;$$

$$(I) \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = d > 0, \quad \text{або} \quad (II) \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$

В роботі досліджується питання про існування у системи (1) і асимптотичну поведінку $t \to +\infty$ розв'язків наступних типів

$$(I, I); \quad (II, II); \quad (I, II); \quad (II, I),$$

де перша цифра у дужках вказує поведінку першої компоненти розв'язку системи (1), друга – другої компоненти розв'язку.

У випадку системи зі степеневими нелінійностями дані питання раніше вирішувались в праці [1].

1. Jaros J., Kusano T. *Existence and precise asymptotic behavior of strongly monotone solutions systems of nonlinear differential equations.* Differ. Eq. Appl. 2013; 5: 185-204.

ТЕОРЕМИ ТИПУ ПОВЗНЕРА-ВІНГОЛЬЦА ДЛЯ СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Володимир Молибога
Інститут математики НАН України
Київ, Україна
e-mail: molyboga@imath.kiev.ua

В гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R})$ досліджено симетричні оператори Штурма-Ліувілля L_0, які породжені формальним диференціальним виразом

$$l[u] := -(pu')' + qu + i((ru)' + ru'),$$

при мінімальних припущеннях на коефіцієнти. Припускаємо, що коефіцієнти задовольняють умовам

$$q = s + Q', \quad i, p, \frac{1}{p}, s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad \frac{Q}{\sqrt{|p|}}, \frac{r}{\sqrt{|p|}} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}),$$

де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій, і всі функції p, Q, r, s є дійсними. Зокрема, коефіцієнти q і r' можуть бути мірами Радона на числовій осі $\mathbb{R}$, а функція p може мати розриви.

Основний результат [1]: знайдено достатні умови на коефіцієнт p, як на всій осі так і на послідовності інтервалів, при виконанні яких з напівобмнженості знизу симетричного оператора L_0 слідує його самоспряженість.

Результати отримано спільно з В. Михайлецем та А. Горюновим.

1. Mikhailets V., Goriunov, A., Molyboga V. *Povzner-Wienholtz-type theorems for Sturm-Liouville operators with singular coefficients.* Comp. Anal. Oper. Theor. 2022; 16: 113.

FORMALISATION OF DANGEROUS CONTENT SPREADING IN SOCIAL NETWORKS

Oksana Ostrovska
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine
e-mail: oksana.ostrovska@lnu.edu.ua

Formalising dangerous content dynamics (via network structure, user states, content analysis, epidemiology) enables simulation and countermeasure design.

Formalization Steps:

1. Network Graph: Social network represented as oriented graph G with users V and interconnections E:

$$G = (V, E). \tag{1}$$

2. User States (Markov): Model state $X_i(t) \in \{S, I, R\}$, transition probability:

$$P(X_i(t+1) = x' \mid X_i(t) = x). \tag{2}$$

3. Content Analysis (LDA): Topic/word distributions via LDA (θ_d: topic dist. per doc d; ϕ_k: word dist. per topic k; z_{dn}: topic of word n; w_{dn}: word n):

$$\theta_d \sim \mathrm{Dir}(\alpha), \quad \phi_k \sim \mathrm{Dir}(\beta), \tag{3,4}$$

$$z_{dn} \sim \mathrm{Multinomial}(\theta_d), \quad w_{dn} \sim \mathrm{Multinomial}(\phi_{z_{dn}}). \tag{5,6}$$

4. Spread Dynamics (SIR Model) [1]: Population dynamics via ODEs (β: infection probability, γ: removal probability):

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I. \tag{7,8,9}$$

Framework enables quantitative simulation, supporting proactive mitigation strategy development.

1. Wang X. et al. *A rumor reversal model of online health information during the Covid-19 epidemic*. Information Processing & Management, 2021.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE DIFFUSION PROBLEM WITH SPATIAL NONLOCAL EFFECT

Oksana Palianytsia
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: oksana.palianytsia@lnu.edu.ua

We consider parabolic partial differential equation (PIDE)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{X},t) = \Delta u(\vec{X},t) + \int_D K(\vec{X},\vec{Y})u(\vec{Y},t)\,d\vec{Y} + f(\vec{X},t),$$

$\vec{X} \in D$, $t \in [0,\infty)$, where D is a bounded 2D or 3D domain, $K : D \times D \to \mathbb{R}$, $f : D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given smooth functions.

This PIDE, together with appropriate initial and boundary conditions, describes nonstationary diffusion incorporating a spatial nonlocal effect. We apply the following two-step approach for the numerical solution: first, using either the Laguerre transform or the Rothe method with respect to the time variable, the given nonstationary problem is reduced to a sequence of boundary value problems for elliptic PIDEs; next, the radial basis function (RBF) method is applied. As a result, we obtain a sequence of linear systems with the same matrix and recurrent right-hand sides. The corresponding integral coefficients are evaluated using Gauss-Legendre quadrature rules. The RBF shape parameters are optimized using genetic algorithms.

The results of the numerical experiments are presented to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method [1].

1. Borachok I., Chapko R., Palianytsia O. *On the numerical solution of a parabolic Fredholm integro-differential equation by the RBF method.* Results in Applied Mathematics. Vol. 26, 2025.

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ. МЕТОД ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА

Анна Р. Папевська [1] **, Галина П. Лопушанська** [2]

[1,2] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

e-mail: [1] anna.papevska@gmail.com, [2] lhp@ukr.net

Використовуючи аналог методу функції Ляпунова дослідження на стійкість розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь із дробовими похідними (див. [1], [2]), знайдено достатні умови стійкості нульових розв'язків систем

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y_1 = -y_1, \\ {}^cD^\alpha y_2 = y_1 - y_2^2, \\ {}^cD^\alpha y_3 = y_2^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x = x(a - by), \\ {}^cD^\alpha y = y(-d + cx), \end{cases}$$

що виникають відповідно у кінетиці хімічних реакцій і екології. Тут ${}^cD^\alpha x$ – похідна Капуто порядку $\alpha \in (0,1]$ функції x.

Результати можуть бути корисними при моделюванні складних процесів у фізиці, біології, екології, де класичні моделі недостатньо точно описують поведінку процесу.

1. Li Y., Chen Y., Podlubny I. *Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems.* Comput. Math. Appl. 2010; 59: 1810-21.
2. Sabatier J., Aoun M., Oustaloup A., Gregoire G., Ragot F., Roy P. *Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation.* Signal Process. 2006; 86: 2645-2657.

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИСИПАТИВНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ВІД ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Галина С. Пасічник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Чернівці, Україна
e-mail: h.pasichnyk@chnu.edu.ua

В шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$, розглядається рівняння

$$\Big(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}} - a_0(t,x_1)\Big)u(t,x) = 0, \quad (1)$$

де $n := n_1 + n_2$, а n_1 , n_2 – натуральні числа такі, що $n_2 \le n_1$; $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2\}$ таких, що $x := (x_1, x_2)$; $S := \partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}$. Рівняння (1) є виродженим рівнянням Колмогорова другого порядку, його коефіцієнти не залежать від змінних виродження x_{2j} , $j \in \{1, ..., n_2\}$, і можуть зростати при $|x_1| \to \infty$.

Ріст коефіцієнтів рівняння (1) залежить від деякої функції $D : \mathbb{R}^{n_1} \to [1, \infty)$ (характеристики дисипації) такої, що $D(x_1) \to \infty$ при $|x_1| \to \infty$, а для рівняння

$$\Big(\partial_t - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)(D(x_1))^{-1}\partial_{x_{1j}}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right) -$$

$$-a_0(t,x_1)(D(x_1))^{-2}\left(-i\partial_{x_{n+1}}\right)^2\Big)\, v(t,x) = 0,$$

з додатковою просторовою змінною x_{n+1} виконується умова параболічності. За припущення гельдеровості коефіцієнтів та додаткової умови на характеристику дисипації для рівняння (1) будується фундаментальний розв'язок задачі Коші.

ON INTEGRABLE IN QUADRATURES EVOLUTION PARTIAL SUPER-DIFFERENTIAL EQUATIONS ON SUPERSPACES

Anatolij K. Prykarpatsky
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine
e-mail: pryk.anat@cybergal.com

Let $\mathbb{R}^{1|1} \simeq \mathbb{R} \times \Lambda^{(1|1)}$ denote the superized real axis $\mathbb{R}$ by means of one-dimensional $\mathbb{Z}_2$-graded Grassmann algebra $\Lambda^{1|1} = \Lambda_0^{1|1} \oplus \Lambda_1^{1|1}$ with coordinates $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \Lambda^{1|1}$ and $D_\theta := \partial/\partial\theta + \theta\partial/\partial x$ be the correspondinf super-derivation, acting on the space $C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}; \Lambda^{1|1})$ of smooth functions on $\mathbb{R}^{1|1}$. For any smooth function $u^{(p)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}; \Lambda^{1|1})$ of parity $(p) \in \mathbb{Z}_2$ there exists the expansion

$$u^{(p)}(x, \theta) = u^{(p)}(x) + \theta u^{(p+1)}(x) \tag{1}$$

at any point $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}$ with uniquely defined smooth mappings $u^{(k)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}; \Lambda^{1|1}_{(k)})$, $k = p, p+1$. For function (1) there is defined the super-integral $\int u^{(p)}(x, \theta) d\theta$, $(p) \in \mathbb{Z}_2$, over the super-variable $\theta \in \Lambda_1^{1|1}$ via rules: $\int 1 \ d\theta = 0$, $\int \theta \ d\theta = 1$. As a simplest example, a general linear second-order non-uniform and non-autonomous evolution partial super-differential equation looks as

$$\partial u/\partial t = a^{(0)}(x, \theta; t)u + b^{(1)}(x, \theta; t)D_\theta u + c^{(0)}(x, \theta; t)D_\theta^2 u, \tag{2}$$

where an odd function $u \in C^2(\mathbb{R}^{1|n}; \Lambda_1^{(1|1)})$ is unknown, the coefficients $a^{(0)}, b^{(1)}, \ c^{(0)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{1|1}; \ \Lambda^{(1|1)})$ are assumed to be given at all points $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}$ and evolution parameter $t \in \mathbb{R}$.

Similarly, one can write down a nonlinear autonomous second-order evolution partial super-differential equation

$$\partial u/\partial t = K(x, \theta; u, D_\theta u, D_\theta^2 u), \tag{3}$$

where the mapping $K : \mathbb{R}^{1|1} \times \mathfrak{M} \to T(\mathfrak{M})$ above is interpreted as a vector super-field on the functional jet-supermanifold $\mathfrak{M} \simeq J^2(\mathbb{R}^{1|1}; \Lambda_1^{(1|1)})$, pameterized by points $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|1}$ and $t \in \mathbb{R}$.

Definition. We will call the evolution super-differential equations like (2) or (3) integrable by quadratures, if these equations possess analytical functional invariants, that is conservation laws $\gamma \in D(\mathbb{R}^{1|1} \times \mathfrak{M})$, invariant with respect to the parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$d\gamma/dt = \partial\gamma/\partial t + (\operatorname{grad}\gamma|K) = 0, \tag{4}$$

where $\varphi := \operatorname{grad}\gamma \in T^*(\mathfrak{M})$ denotes the usual super-gradient of the functional $\gamma \in D(\mathbb{R}^{1|1} \times \mathfrak{M})$ with respect to $u \in C^2(\mathbb{R}^{1|1}; \Lambda_1^{1|1})$.

The following generalization of the classical Noether-Lax lemma makes it possible to describe invariants of the vector super-field (3).

Lemma 1 (Noether-Lax type generalization). Let $\gamma \in D(\mathbb{R}^{1|1} \times \mathfrak{M})$ be an invariant of the vector super-field (3) on the supermanifold $\mathfrak{M}$ and $\varphi = \operatorname{grad}\gamma \in T^*(\mathfrak{M})$ be its gradient. Then the following functional super-differential evolution equation

$$\partial\varphi/\partial t + K^{',*}\varphi = 0 \tag{5}$$

holds on the whole super-space $\mathbb{R}^{1|1} \times \mathfrak{M}$ for all $t \in \mathbb{R}$, where $K^{',*} : T^*(\mathfrak{M}) \to T^*(\mathfrak{M})$ is the adjoint operator to the Frechet derivative $K' : T(\mathfrak{M}) \to T(\mathfrak{M})$ of the vector super-field (3) with respect to the natural bilinear super-form $(\cdot|\cdot) :\ T^*(\mathfrak{M}) \times T(\mathfrak{M}) \to \Lambda^{1|1}$ on the Euclidean product $T^*(\mathfrak{M}) \times T(\mathfrak{M})$.

Our work is devoted to a development of the classical Hormander [1] approach to studyng the asymptotic solutions to the Noether-Lax type evolution equation (5) and their application for constructing invariants [2] of nonlinear evolution partial super-differential equations (3).

1. Hörmander L. *Linear Partial Differential Operators.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1964.
2. Blackmore D., Prykarpatsky A.K., Samoylenko V.H. *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics.* NJ: World Scientific Publisher, 2011.

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ І ВИРОДЖЕННЯМ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Іван Д. Пукальський [1] **, Богдан О. Яшан** [2]
[1,2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
Чернівці, Україна
e-mail: [1] i.pukalsky@chnu.edu.ua, [2] b.yashan@chnu.edu.ua

Нехай η , t_0 , T – фіксовані числа, $0 \le t_0 < T$, $\eta \in (t_0, T)$, Ω – деяка обмежена область, $dim\,\Omega \le n-1$,

$$D = \{(t,x) \ | \ x \in \overline{\Omega},\ t \in [t_0,T)\} \cup \{(t,x) \ | \ t=\eta,\ x \in R^n\} .$$

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, T) \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in \Pi \setminus D$ рівняння

$$(2) \qquad \partial_t u - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t,x)\partial_x^k u - \sum_{|p| \le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p u = f(t,x),$$

і інтегральну умову за змінною t

$$(3) \qquad u(t_0,x) + \int_{t_0}^{T} b(t,x)u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Задача (1), (2) досліджується у просторах $C^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ [1].

Теорема 1. Нехай для задачі (1), (2) виконані умови а), б) (теорема 1, [1]) $b(t,x) \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ і справджується нерівність

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha} \le C(\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\|_{2b+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi\|_{\alpha}).$$

1. Pukal's'kyi I.D. *Cauchy Problem for Nonuniformly Parabolic Equations with Power Singularities.* Journal of Mathematical Sciences, 2023, vol 277. P 33-46. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-023-06811-5

CORRECTNESS IN THE CLASS OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS OF THE DIRICHLET-NEUMANN PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNSOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHEST TIME DERIVATIVE

Sofiia M. Repetylo

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NASU, Lviv, Ukraine

Lviv Polytechnic National University

Lviv, Ukraine

e-mail: repetylosofiya@gmail.com

There is considered such boundary value problem in a multidimensional layer $Q^p := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\right\}$, $T > 0$, $p \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s| \le \omega} a_s^r \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial^{2j-2} u\,(t,x) / \partial t^{2j-2}\right)\big|_{t=0} = \varphi_j\,(x)\,, \\ \left(\partial^{2j-1} u\,(t,x) / \partial t^{2j-1}\right)\big|_{t=T} = \varphi_{n+j}\,(x)\,, \end{array} \right. \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad (2)$$

where $L\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \sum\limits_{|s| \le 2l} b_s \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}}$ – elliptic operator, $a_s^r, b_s \in \mathbb{C}$, $a_0^1 \ne 0$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$.

The solvability of problem (1), (2) is investigated in the class of the almost periodic in the variables $x_1, \ldots, x_p$ functions, with a given spectrum

$$M := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{-k} = -\mu_k, \mu_0 = 0, d_1\,|k|^{\sigma_1} \le |\mu_k| \le d_2\,|k|^{\sigma_2}, k \in \mathbb{Z}^p\}\,,$$

where $d_2 \ge d_1 > 0$, $\sigma_2 \ge \sigma_1 > 0$.

There are established conditions of the unique solution existence for problem (1), (2) in the scale of spaces of the exponential type for almost all (with respect to the Lebesgue measure in $\mathbb{R}$) numbers T and for almost all (with respect to the Lebesgue measure) coefficients of the equation (1).

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З УМОВАМИ ДІРІХЛЕ У БАГАТОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ

Іван Я. Савка[1], **Михайло А. Митрофанов**[2]

[1,2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

e-mail: [1] ivan.savka@pnu.edu.ua

Нехай $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathcal{D} = (x_0, x_n)$ – відрізок дійсної прямої $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_j = (x_{j-1}, x_j) \subset \mathcal{D}$, $x_{j-1} < x_j$, $u_j = u_j(x,t)$, $j = 1, \ldots, n$.

В області $\mathcal{D} \times \Omega$ для $u = (u_1, \ldots, u_n)$ розглядається задача

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in \mathcal{D}_j \times \Omega, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$u_1|_{x=x_0} = g_1(t), \quad u_n|_{x=x_n} = g_2(t), \quad t \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial x^s}\Big|_{x=x_{j\,-}} = \frac{\partial^s u_{j+1}}{\partial x^s}\Big|_{x=x_{j\,+}}, \quad s = 0, 1, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, які є попарно різними, g_1 і g_2 – задані періодичні функції із простору Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega)$.

Методом розділення змінних здійснено побудову аналітичних формальних розв'язків задачі (1)-(3) у вигляді рядів Фур'є. Досліджено коректність даної задачі в просторах Соболєва і отримано достатні умови існування єдиного розв'язку u із компонентами u_j із простору $\mathbf{C}^2(\mathcal{D}_j; \mathbf{H}_q(\Omega))$, $j = 1, \ldots, n$.

1. Hahn D.W., Ozisik M.N. *Heat Conduction.* New York: Wiley, 2012.
2. Carr E.J., Turner I.W. *A semi-analytical solution for multilayer diffusion in a composite medium consisting of a large number of layers.* App. Math. Model. 2016; 40: 7034-7050.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Марта А. Савчин [1], Галина П. Лопушанська [2]
[1,2] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
Львів, Україна
e-mail: [1] martasavchyn089@gmail.com, [2] lhp@ukr.net

Рівняння з дробовими похідними знаходять все більше застосувань [1, 2]. Використовуючи перетворення Лапласа [3] звичайних та узагальнених функцій, їхні властивості, отримано розв'язки окремих, важливих для практики, рівнянь у згортках, зокрема, звичайних рівнянь із дробовими похідними.

За допомогою перетворення Лапласа побудовано розв'язок крайової задачі для рівняння дробової дифузії у першому квадранті, що має застосування у теорії сигналів, також побудовано розв'язок задачі у шарі для телеграфного рівняння

$$^{c}\mathrm{D}_t^{2\alpha}u + b\,^{c}\mathrm{D}_t^{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)$$

з дробовими похідними Капуто за часом.

1. Kisela T. *Fraction differential equations and their applications.* Brno, 2008. – 71 p.
2. Kai Diethelm. *The analysis of fractional equations. An applications-oriented expositions using differential operators of Caputo type.* Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. DOI:10.1007/978-3-642-14574-2
3. Lewis B.J., Onder E.N., Prudil A.A. *Laplace and Fourier transforms.* Advanced Mathematics for Engineering Students. 2022. P. 75-109. https://doi.org/10.1016/978-0-12-823681-9.00011-3

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКІВ БАГАТОТОЧКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Михайло М. Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

e-mail: mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Нехай $l, n, p \in \mathbb{N}$, $l \le n$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$,

$$A_j(k) = \sum_{|s| \le j} A_{j,s}\, k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}, \quad A_{j,s} \in \mathbb{C},$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1, \quad s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \quad |s| = s_1 + \dots + s_p,$$

$f_1(t,k), \dots, f_n(t,k)$ – така фундаментальна система розв'язків рівняння $y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(k) y^{(j)}(t) = 0$, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j, q = 1, \dots, n$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $r_1, \dots, r_l \in \{1, \dots, n\}$, $r_1 + \dots + r_l = n$, $t_1, \dots, t_l \in [0, T]$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_l)$,

$$\vec{f}_{j,r_q}(t,k) = \mathrm{col}(f_j(t,k), f_j'(t,k), \dots, f_j^{(r_q-1)}(t,k)), \quad q = 1, \dots, l,$$

$$\vec{F}_j(\vec{t}, k) = \mathrm{col}(\vec{f}_{j,r_1}(t_1,k), \dots, \vec{f}_{j,r_l}(t_l,k)), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Delta(k) = \det \|\vec{F}_1(\vec{t}, k), \dots, \vec{F}_n(\vec{t}, k)\|, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{1}$$

Визначники (1) виникають при дослідженні багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними в циліндричних областях. За допомогою метричного підходу [1] встановлено, що для належно вибраних сталих ω, δ, γ оцінка

$$|\Delta(k)| \ge (1 + |k|)^{-\omega} \exp(\delta |k|^{\gamma}), \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|, \tag{2}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^l$) векторів $\vec{t} \in [0, T]^l$ для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$.

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* Київ: Наук. думка, 2002.

ВЕРХНЯ ПОТОЧКОВА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ З P-ЛАПЛАСІАНОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОТЕНЦІАЛУ ВОЛЬФА

Ігор І. Скрипнік [1], **Євген С. Зозуля** [2]

[1] *Інститут прикладної математики та механіки НАН України Черкаси, Україна*

[2] *Донбаська державна машинобудівна академія Краматорськ-Тернопіль, Україна*

e-mail: [1] ihor.skrypnik@gmail.com [2] albelgen27@gmail.com

Узагальнюється представлення Пуассона на випадок квазілінійного параболічного рівняння дивергентного типу

$$v(x)u_t - \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad p > 2, \tag{1}$$

у області $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, з ваговими функціями $v(x)$, $w(x)$, що належать класу Маккенхаупта та правою частиною $f \in L^1(\Omega_T)$. Вважаємо, що Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$.

Також розглядаємо узагальнення рівняння (1) – квазілінійне параболічне рівняння дивергентного типу

$$v(x)u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,\nabla u) = f(x,t) \quad \text{у} \quad \Omega_T. \tag{2}$$

При певних умовах на вхідні дані отримано точкові оцінки узагальненого розв'язку рівнянь (1), (2) через ваговий потенціал Вольфа ([1]-[9]). Доведення (див. [9]) ґрунтується на відповідних модифікаціях ітераційної техніки Де Джорджі [2], методу внутрішнього масштабування Ді Бенедетто [3] адаптації техніки Кілпелайнен-Мали [4]-[5] до параболічних рівнянь та ідеями з [7]-[8].

1. Adams A., Fournier J.J. *Sobolev Spaces.* Acad. Press, 2003.
2. De Giorgi E. *Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolary.* Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957; 3: 25-43.

3. Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V. *Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations.* New York: Springer, 2012.
4. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.* New York: Oxford Science Publications, 1993.
5. Kilpeläinen T., Malý J. *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations.* Acta Math. 1992; 172: 137-161.
6. Ladyzhenskaya O.A, Solonnikov V.A., Uraltceva N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Amer. Math. Soc. 1968.
7. Liskevich V., Skrypnik I.I. *Harnack's inequality and continuity of solutions to quasi-linear degenerate parabolic equations with coefficients from Kato-type classes.* J. Diff. Eq. 2009; 247 (10): 2740-2777.
8. Liskevich V., Skrypnik I., Sobol Z. *Potential estimates for quasi-linear parabolic equations.* Advanced Nonlinear Studies. 2011; 11 (4): 905-915.
9. Zozulia Y. *Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic p-Laplacian equation via Wolff potential.* Праці ІПММ НАН України. 2023; 36 (2): 72-90.

NONLOCAL TWO-POINT PROBLEM FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EULER TYPE

Yaroslav O. Slonovskyi [1], **Volodymyr S. Ilkiv** [2], **Mykhailo M. Symotiuk** [3]

[1,2] *Lviv Polytechnic National University*
Lviv, Ukraine
[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua,
[2] ilkivvv@ukr.net, [3] mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

We consider the nonlocal two-point problem

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u(t,x) + \sum_{j=1}^{n} A_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-j} u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\mu_0\, \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\bigg|_{t=t_0} + \mu_1\, \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\bigg|_{t=t_1} = \varphi_j(x),\ j=1,\dots,n,\ t_0<t_1, \tag{2}$$

where $t\in(0,T)$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega^p$, $\Omega_p=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $t_0,t_1\in(0,T]$, $\mu_0,\mu_1\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$,

$$A_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s|\le j} a_{j,s}\,\frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}}\dots\frac{\partial^{s_p}}{\partial x_p^{s_p}},\quad j=1,\dots,n,$$

$$a_{j,s}\in\mathbb{C},\quad s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p,\quad |s|=s_1+\ldots+s_p.$$

Sufficient conditions for the correct solvability of the problem (1), (2) are established. Using a metric approach [1], it is shown that such conditions are fulfilled for almost all (with respect to the Lebesgue measure) parameters of the problem (1), (2). The obtained results develop the research in [1].

1. Ptashnyk B.Yo., Ilkiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. *Nonlocal boundary value problems for partial differential equations*. Kyiv: Nauk. Dumka, 2002.

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Іван Р. Тимків, Оксана М. Медвідь

[1] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

e-mail: [1] tymkiv_if@ukr.net, [2] medoks@ukr.net

Нехай $J_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, – функція Бесселя I-го роду порядку n; E_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір рядів $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} g_k e^{ikx}$, $g_k \in \mathbb{C}$, для яких $\|g; E_\alpha\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |g_k|^2 |k|^{2\alpha} < \infty$; E_α^4 – простір рядів $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} u_k(t) e^{ikx}$, коефіцієнти $u_k(t)$ яких є аналітичними за t на $[0,T]$, $\|u; E_\alpha^4\|^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum\limits_{j=0}^{4} \max\limits_{t\in[0,T]} |u_k^{(j)}(t)|^2 |k|^{2\alpha} < \infty$.

У просторі E_α^4 досліджено розв'язність задачі

$$\prod_{q=1}^{2} \left(\partial_t^2 + \tfrac{2\nu}{t}\partial_t - a_q \partial_x^2\right) u = 0, \quad u|_{t=t_j} = g_j(x), \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 > 0$, $a_1 \neq a_2$, $0 < t_1 < t_2 \leq T$.

Позначимо $\Delta(k) = \det \left\| J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_q}|k|t_j)/t_j^{\nu-\frac{1}{2}} \right\|_{j,q=1}^{2}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Теорема 1. Нехай $\Delta(k) \neq 0$ для $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ та $\exists \omega \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих k виконується нерівність $|\Delta(k)| > |k|^{-\omega}$. Якщо $g_1, g_2 \in E_{\alpha_1}$, де $\alpha_1 = \alpha + \omega + \nu + 3/2$, то існує єдиний розв'язок (1) з простору E_α^4.

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* Київ: Наук. думка, 2002.

СИСТЕМИ БУСІНЕСКА-СТОКСА З ВИПАДКОВИМ ЗБУРЕННЯМ

Мар'яна В. Хома[1], **Олег М. Бугрій**[2]
[1,2] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*
e-mail: [1] mariana.khoma@lnu.edu.ua, [2] oleh.buhrii@lnu.edu.ua

Нехай $T > 0$ та $n \in \mathbb{N}$ – деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, $\partial\Omega$ – межа Ω, $(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний імовірнісний простір, $\Pi_{0,T} = \Omega \times (0,T) \times \mathbb{S}$ та $\Theta_{0,T} = (0,T) \times \mathbb{S}$.

Шукатимемо невідомі функції $u = (u_1, \ldots, u_n) : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, $\pi : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $\theta : \Pi_{0,T} \to \mathbb{R}$, які задовольняють

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \big(A_{ij}(x,t) u_{x_i}\big)_{x_j} + G(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u +$$

$$+ B\theta + \nabla\pi = F(x,t,\omega) + b_t(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{2}$$

$$\theta_t - a\Delta\theta + (\mathfrak{B}, u)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t,\omega), \qquad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{3}$$

$$\int_{\Omega} \pi(x,t,\omega)\, dx = 0, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{4}$$

$$u(x,t,\omega) = 0, \quad \theta(x,t,\omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (t,\omega) \in \Theta_{0,T}, \tag{5}$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad \theta(x,0,\omega) = \theta_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{6}$$

Тут, зокрема, b_t – доданок типу білого шуму, $q = q(x,t)$ – змінний показник нелінійності системи (1).

При певних умовах на вхідні дані доведено теореми про існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(6).

SLOWLY VARYING SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEARITIES OF EXPONENTIAL TYPES

Olga O. Chepok
South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky
Odesa, Ukraine
e-mail: olachepok@ukr.net

We consider the following differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t) \exp(R_0(y, y') + \exp(R_1(y, y'))), \tag{1}$$

where $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \le +\infty$), the functions $R_k : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ ($k \in \{0, 1\}$) are continuously differentiable, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is the one-sided neighborhood of Y_i. We also suppose the functions R_k satisfy the conditions

$$\lim_{\substack{(y_0,y_1)\to(Y_0,Y_1)\\(y_0,y_1)\in\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}}} R_k(y_0, y_1) = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{y_i\to Y_i\\ y_i\in\Delta_{Y_i}}} \frac{y_i \dfrac{\partial R_k(y_0, y_1)}{\partial y_i}}{R_k(y_0, y_1)} = \gamma_{ki} \text{ uniformly by } y_j \ne y_i \ (k, i, j \in \{0, 1\}).$$

We have established the necessary and sufficient conditions of existence to the equation (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-solutions and asymptotic representation as $t \uparrow \omega$ for such solutions and its first order derivatives. Results are similar to those obtained (see in [1]) for $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions in case $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$.

1. Bilozerova M.A., Chepok O.O. *Regularly Varying Solutions of Differential Equations of the Second Order with Nonlinearities of Exponential Types.* Reports of Qualitde. 2024; 3: 24-27.

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ТА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Ольга О. Щур [1] **, Галина П. Лопушанська** [2]

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна

e-mail: [1] shchuroliaa@gmail.com, [2] lhp@ukr.net

Використовуючи узагальнення методу Ляпунова про стійкість розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь за першим наближенням на випадок диференціальних рівнянь із дробовими похідними [1, 2], знайдено достатні умови стійкості нульових розв'язків деяких систем рівнянь із дробовими похідними. Цю теорію застосовано до знаходження достатніх умов стійкості економічної моделі Солоу.

Застосовуючи аналог методу Ейлера побудови загального розв'язку лінійої однорідної системи рівнянь із дробовими похідними однакового порядку і сталими коефіцієнтами [1], перетворення Лапласа, побудовано розв'язки окремих таких систем рівнянь, а також розв'язок задачі Коші для рівняння Баглія-Торвіка із похідними різних порядків, звівши його до системи рівнянь із похідними однакового дробового порядку.

1. Kai Diethelm. *The analysis of fractional equations. An applications-oriented expositions using differential operators of Caputo type.* Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
   DOI:10.1007/978-3-642-14574-2
2. Qian D., Li C., Agarwal R., Wong P. *Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative.* Mathematical and Computer Modelling. 2010. Vol. 52, Issues 5-6. P. 862-874.

ROBUST STABILITY FOR THE PDE-ODE SYSTEM

Taras V. Yusypiv
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Kyiv, Ukraine
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua

Let consider the following problem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = A \triangle u - f(u) + B(x)v(t) + D(x)d_1(t), \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = -F(v) + \int\limits_{\Omega} G(x)u(x,t)dx + d_2(t),$$

where $\Omega \in \mathbb{R}^m$ is bounded domain, A is $N \times N$ matrix such that $\frac{1}{2}(A+A^*) \geq \nu_1 I$, $u = u(x,t) = (u^1, ..., u^N)$, $v = v(t) = (v^1, ..., v^M)$ are unknown functions, $B, D, G \in L^2(\Omega)$ are given matrices of corresponding dimensions, $d_1 \in L^\infty(0,\infty;\mathbb{R}^N)$, $d_2 \in L^\infty(0,\infty;\mathbb{R}^M)$ are incoming signals, and $\forall u, w \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^M$,

$$f \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^M;\mathbb{R}^M),$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(u)u^i \geq \nu_2 \sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} - c_1, \sum_{i=1}^N |f^i(u)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq c_2(\sum_{i=1}^N |u^i|^{p_i} + 1),$$

$$(Df(u)w, w)_{\mathbb{R}^N} \geq -c_3 \cdot \|w\|^2_{\mathbb{R}^N}, \ \sum_{i=1}^M F^i(y)y^i \geq \nu_3 \|y\|^2_{\mathbb{R}^M} - c_4,$$

$\nu_1, \nu_2, \nu_3, c_1, c_2, c_3, c_4$ are positive constants, $p_i \geq 2$, $i = \overline{1,N}$. It was found that this system has a global attractor which is stable in the sense of local ISS, i.e. $\|S_d(t, z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty)$.

1. Kapustyan O.V., Yusypiv T.V. *Stability Under Perturbations for the Attractor of a Dissipative PDF-ODF-Type System.* Journal of Mathematical Sciences, **272**, 2023, 236-243. DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-023-06413-1

С Е К Ц І Я   2

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ON THE DISTRIBUTION OF A RANDOM VARIABLE – THE PERIOD BETWEEN EARTHQUAKES

Iryna B. Bazylevych

Ivan Franko National University of Lviv

Lviv, Ukraine

e-mail: iryna.bazylevych@lnu.edu.ua

A sample of earthquake data from 1920 to the present is studied.

It was found that the period (in days) between earthquakes is subject to a geometric distribution.

No single distribution parameter was identified during the study period. Therefore, a breakdown of 1000 earthquakes was performed.

This is due to the fact that the density of earthquakes increased.

The calculations were performed in a programming language R.

1. Using R for Time Series Analysis // R in time series.
2. Francois B., Teber Kh., Brett L., Leeding R., Gimeno-Sotelo L., Domeisen D.I.V., Suarez-Gutierrez L., Bevacqua E. Concurrent modes of climate variability linked to spatially compounding wind and precipitation extremes in the Northern Hemisphere. https://egusphere.copernicus.org/preprints/2024/ egusphere-2024-2079/
3. USGS Scientific Research Results. https://www.usgs.gov/programs/earthquake-hazards/earthquakes

ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ОБЛАСТЯХ УКРАЇНИ

Олег М. Бугрій [1], Тетяна В. Кобилинська [2], Оксана Т. Холявка [3]

[1,3] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

[2] *Державний університет "Житомирська політехніка" Житомир, Україна*

[3] *Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України Львів, Україна*

e-mail: [1] oleh.buhrii@lnu.edu.ua, [2] kebpua_ktv@ztu.edu.ua, [3] oksana.kholiavka@lnu.edu.ua

Одним із важливих чинників, що зумовлюють зміну чисельності населення країни та впливають на його перерозподіл між окремими регіонами та населеними пунктами, його структуру, культурний та освітній рівень, є механічний рух населення або міграція.

Міграція є цілком природним, хоча й досить складним процесом, який важко піддається методам прямого впливу, проте вимагає постійної уваги з боку держави, його врахування при розробці державою економічної, соціальної, демографічної, етнокультурної та зовнішньої політики. З розвитком людства основним міграційним чинником ставав економічний та соціально-культурний рівень життя індивідуумів, що проживають на певній території.

За допомогою україномовного пакету програм GRETL (GNU Regression Econometrics and Time Series Library) проведено аналіз міграційних процесів в Україні по областях. Нами встановлено певні параметри, які здійснюють найбільший вплив на міграційний приріст населення.

MATHEMATICS OF TIME SERIES ANALYSIS

Rostyslav Hryniv
Ukrainian Catholic University
Lviv, Ukraine
e-mail: rhryniv@ucu.edu.ua

The aim of this talk is to review some methods of linear algebra and analysis that are effectively used for time series imputation and forecasting.

In particular, we demonstrate various approaches based on the singular value decomposition and low-rank approximation of the derived progression matrix to single out the (possibly non-linear) trend and seasonal and stationary components of the time series. The singular spectrum analysis then allows fitting the ARMA(p, q) model to the stationary component.

Another example is an interesting application of the discrete Fourier transform to recover missing time series values based on the partially known frequencies.

ON THE MIXTURE OF HIDDEN MARKOV MODELS

Andriy Yu. Drebot
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: andrii.drebot.amts@lnu.edu.ua

Hidden Markov Model is a powerful tool for data analysis when it comes to sequence data modeling. However, sequence data can be generated by several underlying processes that are happening simultaneously. That is, we can use the mixture of Hidden Markov Models for better process modeling.

In this research, we introduce the process that can be viewed as mixture of Hidden Markov processes. We consider the setting in which any of such processes can share arbitrary part of hidden states with any other process in the mixture.

ПОБУДОВА СУМІШІ РІВНЯНЬ РЕГРЕСІЙ

Ярослав І. Єлейко
Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна
e-mail: yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua

На рівняння регресії в умовах невизначеності важливий вплив має зовнішнє середовище, яке пояснює дану невизначеність. В такому випадку, при аналізі вибірки необхідно враховувати цей чинник. Варто зазначити, що в більшості досліджень вплив зовнішнього середовища явно не враховується. У статтях [1], [2] досліджуються суміші розподілів, але не вказується, звідки ці суміші виникають. У цій роботі пропонується метод дослідження статистичних даних, у яких виникають такі суміші.

Розглянемо вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$, і відомо, що зовнішнє середовище описується подіями $A_1, A_2, ..., A_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій. На першому етапі виділяємо статистичні дані, які відповідають настанню кожної з цих подій: $x(A_1), ..., x(A_n)$, та записуємо рівняння регресії $g(x(A_1))$. Далі, за умови, що вибірка є досить великою, можна записати рівняння регресії $g(x(A_1)), g(x(A_2)), ..., g(x(A_n))$. Враховуючи, що $\frac{n(A_i)}{n} \to p_i$, отримуємо суміш регресій:

$$g(x) = p_1 g(x(A_1)) + p_2 g(x(A_2)) + \ldots + p_n g(x(A_n)).$$

1. Maiboroda R., Miroshnychenko V., Sugakova O. *Quantile estimators for regression errors in mixture models with varying concentrations.* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences. 2024; 78 (1): 45-50.
2. Maiboroda R., Sugakova O. *Estimation and classification by observations from a mixture.* Kyiv: Kyiv University, 2008.

АНАЛІЗ НОВИННИХ СТАТЕЙ ПРО ВІЙНУ МІЖ УКРАЇНОЮ ТА РОСІЄЮ

Ярослав І. Єлейко[1], **Антон М. Нос**[2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua, [2] anton.nos@lnu.edu.ua

У сучасному світі, де інформаційні війни стали невід'ємною частиною конфліктів, аналіз тональності та пропаганди допомагає виявляти упередження та маніпуляції в медіа. Це сприяє формуванню критичного мислення у громадян та підвищенню їхньої здатності розрізняти правдиву інформацію від дезінформації. Особливо актуальним це є в контексті війни між Україною та Росією, де об'єктивне висвітлення подій може впливати на міжнародну думку та політичні рішення.

Для навчання моделей були обрані новинні статті з різних джерел, що стосуються війни між Україною та Росією. Було зібрано більше 500 статей з медіа-джерел різних країн, зокрема України, США, Польщі, Білорусі та Росії.

У ході дослідження було виконано автоматизований аналіз новинних статей, пов'язаних із війною між Україною та Росією. Використовуючи методи машинного навчання, такі як TF-IDF і SVM, а також API ChatGPT, визначено тональність та виявлено пропаганду в новинних статтях з різних країн світу.

1. Devlin J., Chang M.W., Lee K., Toutanova K. *BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding.* In Proceedings of NAACL-HLT. 2019. 4171-4186.
2. Vaswani A., et al. *Attention is All You Need.* In Proceedings of NIPS. 2017. 5998-6008.

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ВИГОТОВЛЕННЯ ДЕТАЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ АНАЛІТИЧНИХ ТА ІМІТАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАМКНЕНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Костянтин Ю. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна
e-mail: kostiantyn.zhernovyi@lnu.edu.ua

Виробництво певного типу деталей – це тривалий процес складання, який завершується коротким періодом випалювання в печі. Оскільки експлуатаційні витрати печі є високими, кілька складальників спільно використовують одну піч, яка може випалювати лише одну деталь за раз. Метою цього дослідження є визначення такої кількості складальників m, щоб коефіцієнт завантаження печі K був максимальним. Оптимальне значення m визначатимемо як найменше значення, яке задовольняє умову $K \geq 0.990$. Для цього ми розробляємо аналітичну та імітаційну моделі на основі замкненої системи масового обслуговування. Використовуючи аналітичну модель та імітаційну модель у середовищі GPSS World [1], ми досліджуємо залежність оптимальної кількості складальників від таких параметрів: коефіцієнтів варіації $V(X)$, $V(Y)$ та відношення $\rho = E(Y)/E(X)$, де X – час складання деталі, а Y – час випалювання деталі в печі. Верифікацію імітаційної моделі здійснюємо, порівнюючи результати з отриманими аналітичним методом.

1. Zhernovyi Yu. *Creating Models of Queueing Systems Using GPSS World.* Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015.

ФОРМУЛИ ДЛЯ СЕРЕДНЬОГО ЧАСУ ПЕРЕХОДУ МІЖ СТАНАМИ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ЗАГИБЕЛІ ТА РОЗМНОЖЕННЯ

Юрій В. Жерновий

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна

e-mail: yuriy.zhernovyy@lnu.edu.ua

У цій праці розглядаються марковські процеси загибелі та розмноження зі сталими інтенсивностями переходів між сусідніми станами, які володіють ергодичною властивістю. Використовуючи властивості експоненціального розподілу, ми отримуємо формули: 1) для середнього часу переходу зі стану i до стану j та назад, зі стану j до стану i; 2) для середнього часу перебування поза заданим станом i; 3) для середнього часу, проведеного у групі станів $(0,\ldots,i-1)$ ліворуч від стану i; 4) для середнього часу, проведеного у групі станів $(i+1,i+2,\ldots)$ праворуч від стану i. Це дає змогу отримати формули для математичних сподівань випадкових величин: час доступності системи, тривалість періоду зайнятості (для системи Ерланга з відмовами і системи з чергою), час до відмови, час між відмовами (для моделі надійності відновлюваної системи).

Одержані формули можна використовувати для перевірки імітаційних моделей [1], створених для розрахунку характеристик різних стохастичних систем із неекспоненціальними розподілами.

1. Zhernovyi Yu. *Creating Models of Queueing Systems Using GPSS World.* Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015.

ON FELLER SEMIGROUPS FOR ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION PROCESSES WITH MOVING MEMBRANES

Bohdan I. Kopytko [1] **, Roman V. Shevchuk** [2]
[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[2] *Lviv Polytechnic National University*
Lviv, Ukraine
e-mail: [2] bohdan.kopytko@gmail.com, [2] r.v.shevchuk@gmail.com

We consider the problem of constructing a two-parameter Feller semigroup associated with a certain one-dimensional inhomogeneous Markov process and study its properties. We are interested in the process on the real line, which can be described as follows. At the interior points of the half-lines, which are separated by a point whose position depends on the time variable, this process coincides with the ordinary diffusion processes defined there. Its behavior on the common boundary of these half-lines is determined by a kind of general Feller-Wentzell conjugation condition (see [1]).

The problem is studied using analytical methods. With this approach, the problem of the existence of the desired semigroup leads to a corresponding nonlocal conjugation problem for a second order linear parabolic equation of Kolmogorov's type. The peculiarity of this problem is that the half-bounded domains on the plane, where the equations are considered, are curvilinear. Furthermore, the function of the time variable, which determines the common boundary of these domains, satisfies only the Hölder condition with exponent greater than $\frac{1}{2}$.

1. Kopytko B., Shevchuk R. *One-dimensional diffusion processes with moving membrane: partial reflection in combination with jump-like exit of process from membrane*. Electronic Journal of Probability. 2020; 25 (41): 1-21.

ON THE CONVERGANCE OF A SEQUENCE OF NEARLY CRITICAL BRANCHING PROCESSES WITH IMMIGRATION

Taras B. Lysetskyi
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: taras.lysetskyi@lnu.edu.ua

Consider a sequence of branching processes given by

$$Z_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{Z_{k-1}^{(n)}} \xi_{j-1,k}^{(n)} + h_k^{(n)}, \quad i = 1, 2, ...,$$

where $\{\xi_{j,k}^{(n)}, j, k \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of i.i.d. r.v.'s with mean μ_n and variance σ_n^2; $\{h_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ is a sequence of i.i.d. r.v.'s with mean λ_n and variance b_n^2. We assume that $Z_0^{(n)} = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ and that sequences $\{\xi_{j,k}^{(n)}\}$ and $\{h_k^{(n)}\}$ are independent. We also assume that $\mu_n \to 1$, $n \to \infty$.

Consider random stepwise function $Z_n(t) = Z_{[nt]}^{(n)}$. It is well known [1], that if $\mu_n = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$, $n \to \infty$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$, $b_n^2 \to b_0^2 > 0$, and $\sigma_n^2 \to \sigma_0^2 > 0$, then $Z_n(t)/n$ converges weakly to diffusion process in Skorokhod space $D[0; +\infty)$. If $\sigma_n^2 \to 0$, then $Z_n(t)/n$ converges weakly to some nonrandom function in $D[0; +\infty)$.

It was also proven [2], that if for some $\alpha < 0$, $\mu_n = 1 + \frac{\alpha}{d_n} + o(\frac{1}{d_n})$, $d_n \to \infty$, $nd_n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda \geq 0$ and $\sigma_n^2 \to 0$, then $Z_n(t)/d_n \to |\alpha|^{-1}\lambda$ in probability for every $t > 0$. We consider a similar case, but with $\sigma_n^2 \to \sigma_0^2 > 0$ and prove pointwise convergence in distribution to the limit process which does not depend on t.

1. Ispany M., Pap G., van Zuijlen M.C.A. *Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean.* Adv. Appl. Probab. 2005; 37: 523-528.
2. Khusanbaev Ya.M. *Convergence of a sequence of nearly critical branching processes with immigration.* Theor. Probability and Mathematical Statistics. 2015; 90: 201-205.

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ДВОПОРОГОВОГО ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Анатолій В. Нікітін[1], **Сергій А. Нечипорук**[2]
[1,2] *Національний університет "Острозька академія", Острог, Україна*
e-mail: [1] anatolii.nikitin@oa.edu.ua,
[2] serhii.a.nechyporuk@oa.edu.ua

Дворежимний двопороговий процес моделює системи з різною динамікою при досягненні певних порогів. Запропоновано наближений метод максимальної правдоподібності для оцінювання параметрів такого дифузійного процесу за дискретними спостереженнями. Метод базується на апроксимації логарифмічної функції правдоподібності для підвищення стабільності обчислень шляхом дискретизації моделі за схемою Ейлера. Модель ґрунтується на процесі Орнштейна-Уленбека (О-У), заданому стохастичним диференціальним рівнянням

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)\,dt + \sigma\,dW_t, \tag{1}$$

де θ – швидкість повернення до середнього рівня μ; σ – інтенсивність шуму; W_t – процес Вінера. Диференціювання функції правдоподібності дало співвідношення для оцінок параметрів дрейфу, дифузії та порогів [1].

Процес О-У має різні характеристики залежно від положення поточного значення відносно порогів r_1 і r_2: нижче першого порогу, між порогами чи вище другого порогу.

Алгоритм оцінювання починається з початкових наближень для r_1 та r_2 і на кожній ітерації оновлює межі діапазонів та переоцінює параметри кожного режиму за методом максимальної правдоподібності до досягнення збіжності.

1. Tsai H., Nikitin A.V. *Threshold models and approximate maximum likelihood estimation of Levy processes.* Cybernetics and Systems Analysis. 2024; 60.

ASYMPTOTIC ANALYSIS FOR A TECHNOLOGICAL LABOR MARKET MODEL USING AVERAGING

A.V. Nikitin [1] **, A.S. Pertsov** [2] **,**
V.A. Sachovska [3]
[1] *National University of Ostroh Academy*
Ostroh, Ukraine
[2,3] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University*
Chernivtsi, Ukraine
e-mail: [1] anatolii.nikitin@oa.edu.ua,
[2] a.pertsov@chnu.edu.ua, [3] sachovskavita@gmail.com

This paper provides a model to describe the interaction between employment and automation in the technological labor market. The system is represented by:

$$C(u,x) = \begin{pmatrix} a(x) - b(x)A(t) - c(x)N(t) & 0 \\ e(x)A(t) & -d(x) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} N(t) \\ A(t) \end{pmatrix}.$$

To incorporate stochastic effects, we extend the model by allowing its parameters to depend on a rapidly switching Markov process. To simplify analysis, we apply the classical averaging approach [1], which replaces fast fluctuations with their expected values under the stationary distribution of the process.

The resulting model provides a approximation that captures the long-term behavior of the original system. Numerical experiments confirm that it replicates the main dynamic trends and offers a practical framework for analyzing employment and automation interactions under structured stochastic variability.

1. Korolyuk V.S., Limnios N. *Stochastic Systems in Merging Phase Space.* World Scientific, 2005. doi:10.1142/5979

ПРО МОДЕЛІ БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В СЕРЕДОВИЩІ З НАПІВПРОЗОРОЮ МЕМБРАНОЮ

Андрій Ф. Новосядло

Львівський національний університет імені Івана Франка

Львів, Україна

e-mail: nandrew183@gmail.com

Нехай на заданій гіперплощині S, яка ортогональна фіксованому орту ν в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, точок $x = (x_1, \ldots, x_d)$ задано обмежені та неперервні за Гельдером функції: скалярна функція $q : S \to [-1, 1]$, векторнозначна функція $\alpha : S \to S$ та операторнозначна функція $\beta : S \to \mathfrak{L}(S)$ (через $\mathfrak{L}(S)$ позначається сукупність всіх лінійних операторів з S в S). Додатково припускаємо, що оператор $\beta(x)$ є симетричним, додатно визначеним і рівномірно невиродженим. В доповіді показується, як за допомогою методики, розвиненої в праці [1], можна побудувати узагальнений дифузійний процес $\big(x(t)\big)_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}^d$ з матрицею дифузії $I + \beta(x)\delta_S(x)$ (I – одинична матриця) та вектором переносу $\big(\nu q(x) + \alpha(x)\big)\delta_S(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, де $\delta_S(x)$ – узагальнена функція на $\mathbb{R}^d$, дія якої на пробну функцію зводиться до інтегрування останньої по гіперплощині S. Саме цей процес і можна розглядати як модель броунівського руху в $\mathbb{R}^d$, на який діє мембрана в точках гіперплощини S, причому напрямок дії в точці $x \in S$ збігається з напрямком вектора $\nu q(x) + \alpha(x)$. Цей тип мембран характеризується також тим, що частинка “встигає” взяти участь у дифузії по мембрані. Функція q трактується як коефіцієнт прозорості мембрани.

1. Kopytko B.I., Portenko M.I. *Six lessons on the theoty of diffusion processes.* Theory of Stochastic Processes. 2024; 28 (44) (2): 39-75.

APPROACH TO ANALYSIS OF FACTORS IN DISORDERS OF PSYCHOMOTOR DEVELOPMENT IN CHILDREN

Olga M. Rybytska[1], **Andriy. I. Pushnyk**[2]
[1] *Lviv Polytechnic National University*
Lviv, Ukraine
[2] *Danylo Halytsky Lviv National Medical University*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] olha.m.rybytska@lpnu.ua [2] apushnyk@gmail.com

In order to identify the relationships between the severity of the disease and various factors (a total of 77 indicators), data from a survey of parents of 70 preschool children (3-7 years old) with psychomotor development disorders, as well as parents of practically healthy peers, were processed. Children were divided into groups depending on neurological nosology, a separate control group consisted of practically healthy children: 30 children with SPD, 17 children with ASD, 13 children with ADHD/ADHD, 10 children with MMD, and 20 children with practically healthy children.

The collected statistical data related to the groups: features of children's eating behavior, obstetric history, nature of feeding at an early age, frequency of diseases per year, parameters of physical development, levels of total calcium, magnesium, and iron in the blood serum of children with diseases.

Comprehensive data analysis included: correlation analysis, Mann-Whitney U-test and cluster analysis. The elbow and silhouette methods were used to calculate the number of clusters. Clustering was performed using the k-means method.

A close relationship has been found between the levels of such trace elements as iron, calcium and magnesium in the blood and the severity of the disease.

Based on the knowledge obtained, a predictive fuzzy logic model of the influence of the levels of the listed trace elements in the blood serum on the severity of the disease has been proposed.

When constructing a fuzzy logical model, data blurring was performed (construction of linguistic terms), membership functions were constructed, and a knowledge base was formed (fuzzy logical rules).

1. Rybytska O., Dronyuk I., Pushnyk A. *Uncertain model for classification of children's neurological diseases* // CEUR Workshop Proceedings. – 2024. – Vol. 3609: Proceedings of the 6th International conference on informatics & data-driven medicine IDDM 2023, Bratislava, Slovakia, November 17-19, 2023. – P. 229-240.
2. Pushnyk A.I., Nyankovskyy S.L. *Nutrient support for preschool children with psychomotor disorders.* Child's health. 2023; 18 (1): 35-43. doi: 10.22141/2224-0551.18.1.2023.1555

STATISTICAL ESTIMATION AND HYPOTHESIS TESTING ON IMPULSE RESPONSE FUNCTION

Iryna Rozora[1], **Anastasiia Melnyk**[2]
[1,2] *Taras Shevchenko National University of Kyiv*
Kyiv, Ukraine
e-mail: [1] irozora@knu.ua

This work estimates a linear time-invariant system's impulse response (IRF) $H(\tau)$ on $[0,\Lambda]$. The IRF characterizes system dynamics and has applications in signal processing and control theory. For a linear system, the input-output relation is:

$$Y(t) = \int_0^\Lambda H(\tau)X(t-\tau)\,d\tau,$$

where $H(\tau)$ is the IRF and Λ the integration limit. We estimate IRF using input-output cross-correlation from single observations under Gaussian noise. The nonparametric estimator:

$$\hat{H}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T Y_N(t)X_N(t-\tau)\,dt$$

uses observed signals $Y_N(t)$, $X_N(t)$ over time T. The estimator proves asymptotically unbiased and consistent. We develop goodness-of-fit tests to verify IRF accuracy. R simulations validate the method, determining thresholds for sample size and averaging intervals, enabling precise nonparametric analysis of time-invariant systems.

1. Kozachenko Y., Rozora I. *On statistical properties of the estimator of impulse response function.* Stochastic Proc., Statistical Meth., Engineering Math. 2023; 408: 563-586.
2. Rozora I., Melnyk A. *Statistical Estimation and Hypothesis Testing on Impulse Response Function.* Austrian Journal of Statistics. 2025; 54 (1): 200-213.

CONTROL PROBLEM FOR A DIFFUSION PROCESS IN A POISSON SCHEME WITHIN A SEMI-MARKOV ENVIRONMENT

Yaroslav M. Chabanyuk [1], **Anatolii A. Nikitin** [2], **Uliana T. Khimka** [3]

[1,3] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*

[1] *Lublin University of Technology, Lublin Poland*

[2] *National University of Ostroh Academy, Ostroh Ukraine*

e-mail: [1] yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua, y.chabanyuk@pollub.pl, [2] anatolii.nikitin@oa.edu.ua, [3] ulyana.khimka@lnu.edu.ua

The transport process $y(t)$ is defined by the equation [1]:

$$dy(t) = C(y(t), x(t))\, dt + d\eta(t, u(t)), \tag{1}$$

where $\eta(t,u)$, $t \geq 0$, is an impulse disturbance process, which in the Poisson approximation scheme is defined by the relation [1]

$$\eta(t, u(t)) = \int_0^t \eta(ds, x(s), u(s))\, ds,$$

$u(t) \in R^d$ is a control function and $x(t)$ is a semi-Markov process [1]. Let the quality criterion of control $u(t)$ for the transport (1) be defined by the function $G(y,x,u)$ with a unique point u^*, where $G(\cdot,\cdot,u^*) = minG(\cdot,\cdot,u)$. Consider stochastic optimization procedure for control function $u(t)$ in the form [1]:

$$du(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y(t), x(t), u(t))\, dt, \tag{2}$$

where $\alpha(t)$ is the learning rate and $\beta(t)$ is a difference scheme step. Sufficient conditions for weak convergence of problem (1), (2) to the diffusion process have been obtained.

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes.* London: Wiley Online Library, 2020.

CONTROL PROBLEM FOR THE MARKOV-MODULATED POISSON PROCESS

Yaroslav M. Chabanyuk [1], **Sergii A. Semenyuk** [2], **Uliana T. Khimka** [3], **Andrii A. Lytvyn** [4]
[1,3] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[2,4] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[1] *Lublin University of Technology, Lublin, Poland*
e-mail: [1] y.chabanyuk@pollub.pl,
[2] serhii.a.semeniuk@lpnu.ua, [3] ulyana.khimka@lnu.edu.ua,
[4] andrii.lytvyn.mavks.2022@lpnu.ua

Lets consider a stochastic evolution system in an ergodic Markov environment given by the evolution equation [1]

$$dy^\varepsilon(t) = C(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2))\, dt + \varepsilon^{-1} a(t, u^\varepsilon(t))\tilde{N}_x(t)\, dt, \qquad (1)$$

where $y^\varepsilon(t) \in R^d$ is a solution, $a(t,u) \in C(R_{\geq 0}, R)$ represents the size and effect of the jump at time t and $u^\varepsilon(t) \in R^d$ is a control function. Control function $u^\varepsilon(t)$ for equation (1) is defined by the quality criterion $J(y,u,x) \in C^{2,2,0}(R^d, R^d, X)$, that has unique extremum (we will consider infinum for the sake of simplicity) for each value of process y and for each state x of the Markov process $x(t)$ at interval $[t_i, t_{i+1})$. Consider stochastic optimization procedure for control function $u^\varepsilon(t)$ in the form [1]:

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)} J(y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t/\varepsilon(t)))\, dt, \qquad (2)$$

where $\alpha(t)$ is the learning rate and $\beta(t)$ is a difference scheme step. In this case limit process $(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$ for control problem is defined by the stochastic differential equations.

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes.* London: Wiley Online Library, 2020.

ГЕНЕРАТОР ЕВОЛЮЦІЇ З МАРКОВСЬКО-МОДУЛЬОВАНИМ ПУАССОНІВСЬКИМ ЗБУРЕННЯМ

Ярослав М. Чабанюк [1], **Сергій А. Семенюк** [2], **Уляна Т. Хімка** [3], **Роман А. Чипурко** [4]

[1,3,4] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

[2] *Національний університет "Львівська політехніка" Львів, Україна*

e-mail: [1] yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua, [2] serhii.a.semeniuk@lpnu.ua, [3] ulyana.khimka@lnu.edu.ua, [4] andrii.chypurko@lnu.edu.ua

Розглядається стохастична еволюція $u^{\varepsilon}(t)$ в ергодичному марковському середовищі у схемі дифузійної апроксимації з малим параметром серій ε, що задається еволюційним рівнянням:

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon^{-1}a(t)\tilde{N}_x(t)dt, \quad u^{\varepsilon}(t) \in R, \tag{1}$$

де $a(t) \in C(R)$ представляє розмір і ефект стрибка в момент часу t, $x(t)$, $t \geq 0$ ергодичний марковський процес в стандартному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$ [1], $\tilde{N}_x(t)$ – компенсований лічильний пуассонівський процес кількості подій до часу t [2].

Отримано сингулярне та асимптотичне представлення генератора двокомпонентного марковського процесу $(x(\frac{t}{\varepsilon^2}), \tilde{N}_x(t))$. Доведено теорему про вигляд граничного генератора процесу, розв'язуючи проблему сингулярного збурення для отриманого сингулярного представлення генератора.

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes.* London: Wiley Online Library, 2020.
2. Semenyuk S.A., Chabanyuk Y.M. *Stochastic evolutionary system with Markov-modulated Poisson perturbations in the averaging schema.* Мат. студії. 2024; 62 (1): 102-108.

STOCHASTIC APPROXIMATION PROCEDURE WITH SEMI-MARKOV SWITCHING FOR SI MODEL

Yaroslav M. Chabanyuk [1] **, Oleg S. Stepaniak** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[1] *Lublin University of Technology*
Lublin, Poland
e-mail: [1] yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua,
[1] y.chabanyuk@pollub.pl, [2] oleg.stepaniak@lnu.edu.ua

Consider stochastic approximation procedure (SAP) for a diffusion process with semi-Markov switching [1] for SI model:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = a(t)[-\beta_X \frac{SI}{P} + \sigma_1 (S - S^*)\omega_1^{'}], \\ \frac{dI}{dt} = a(t)[\beta_X \frac{SI}{P} + \sigma_2 (I - I^*)\omega_2^{'}], \end{cases} \tag{1}$$

where $\beta = 0.2$ is a transmission rate that describes the speed of spreading of the epidemic, $P = 720000$ is a population, $I = 1$ is an initial infected population, $S = 719999$ is an initial susceptible population, $t = 10000$ is a time. Here, $w_1^{'}, w_2^{'}$ denote mutually independent standard Wiener processes, $\sigma_1^{'}$ and $\sigma_2^{'}$ indicate noises for susceptible and infected populations, respectively. $\beta_X = \beta + X$, where X is a semi-Markov process and $G_x(t)$ is a uniform distribution. $G_x(t)$ could have another distribution, but should satisfy the Crammer condition [1]. In (1) $a(t) = 1/(t+1)$ [1].

Numerical calculations of procedure (1) converge to the equilibrium point of the system. SAP for the SIR model is also considered, taking into account changes in coefficients with semi-Markovian switching.

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes.* London: Wiley Online Library, 2020.

БАГАТОВИМІРНЕ РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ В НЕЛІНІЙНІЙ АПРОКСИМАЦІЇ

Оксана А. Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка

Львів, Україна

e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua

Розглянемо матричне рівняння відновлення

$$X^{\varepsilon}(t) = A^{\varepsilon}(t) + F^{\varepsilon} * X^{\varepsilon}(t),$$

де $X^{\varepsilon}(t)$ – сімейство шуканих матричних функцій, $A^{\varepsilon}(t)$ – сімейство заданих невід'ємних матричних функцій, $F^{\varepsilon}(dt)$ – сімейство матричних скінченних інтегральних мір на $[0;\infty)$.

Функція $F^{\varepsilon}(dt)$ може бути представлена у вигляді:

$$F^{\varepsilon} = F + g_1(\varepsilon)B + g_2(\varepsilon)B^2 + \cdots + g_n(\varepsilon)B^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – матриці, $g_1(\varepsilon) \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0$, $\ldots$, $g_n(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $X^{\varepsilon}(t)$ – сімейство марковських процесів із неперервним часом та скінченною кількістю станів $1, 2, \ldots, n$, причому $X^{\varepsilon}(t) \to X(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Також нехай $\xi_i^{\varepsilon}(t)$ – процес із незалежними приростами, де $t \geq 0$, $\xi_i^{\varepsilon}(t) > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для процесу виведено багатовимірне рівняння відновлення.

1. Yarova O.A., Yeleyko Ya.I. *Limit theorem for multidimensional renewal equation.* Cybernetics and System Analysis. 2022; 58 (1): 144-147.
2. Nishchenko I.I. *Transition phenomena for many-dimensional renewal equation of special kind.* Theory of Stochastic Processes. 2000; 6 (22) (1-2): 107-115.

С Е К Ц І Я   3

АНАЛІЗ ДАНИХ
І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

FINANCIAL PROPOSALS MODELING BASED ON A MULTIVARIATE TIME SERIES

Maksym Azarov
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: maksym.azarov@lnu.edu.ua

The current state of financial markets strongly depends on AI (artificial intelligence) involvement in the decision-making process and risk assessment. The ability to quickly respond to market changes, in most cases, plays a critically important role. That is why it is very important to study and model financial offers for a better understanding of how to analyze them. In general, a model of a financial offer can represented as X ($X_t \in R^n$: a vector of multivariate input financial indicators) and Y ($R_t \in R^m$: a vector of financial offers such as credit limit, recommended portfolio investment, and deposit rate) at the moment t [1, 2].

For example, four financial indicators: inflation: x_i^1 ; interest rate: x_i^2 ; index return: x_i^3 ; customer transaction activity: x_i^4 and so on.

The goal is: $Y_{t+h} = f(X_{t-k+1}, ..., X_t)$, where: h is a forecast horizon, f is a financial offer prediction function (model).

Considered approaches: VAR, LSTM/GRU for multivariate time series (MTS); Temporal Fusion Transformers (TFT); Bayesian Structural Time Series (BSTS) and Reinforcement Learning.

1. Shaikh S.A. *Some observations on contemporary financial proposals.* International Journal of Ethics and Systems. 2023; 39 (2): 464-480.
2. Geyer-Klingeberg J., Hang M., Rathgeber A. *Meta-analysis in finance research: Opportunities, challenges, and contemporary applications.* Inter. Review of Finan. Anal. 2020; 71.

EXTERNAL INFLUENCE ON THE DYNAMICS OF POPULATIONS CONSISTING OF TWO SEXES

Galyna M. Barabash[1], **Iulian P. Yeremenko**[2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] galynabarabash71@gmail.com, [2] julian_lviv@yahoo.com

The process of reproduction and mortality in a population consisting of individuals of two sexes – female and male – are considered. The numbers of females and males are described by the random variables $X(t)$ and $Y(t)$, respectively. It is assumed that the reproduction rate is β. The probabilities of natural death of a female and a male are μ, $\mu\prime$, respectively. The probabilities of violent death of a female and a male are s, $s\prime$, respectively. And the ratio of the number of females to males at birth is $\frac{p}{1-p}$. Let the initial numbers of females and males at time $t=0$ be a and b, respectively.

Using the results [2], expressions for the expected of the numbers of females and males were obtained. In order to maintain the population size at its initial level, the external influence, represented by the probability of violent death, must satisfy the following conditions:

$$s \to \frac{\beta p - \mu}{1-2\mu}, \quad s\prime \to \frac{\mu\prime}{2\mu\prime - 1},$$
$$\mu < 0,5, \quad \beta p > \mu, \quad \mu\prime > 0,5.$$

1. Allman E.S., Rhodes J. *Mathematical Models in Biology.* UK: Cambridge, University Press, 2004.
2. Барабаш Г.М., Єременко Ю.П. *Дослідження зовнішнього впливу на процеси розмноження.* Canada: XI Міжнародна науково-практична конф. “Innovative development of science, technology and education”. 2024. 169-171.

CREATION OF UKRAINIAN DATASET FOR OCR TESTING

Pavlo Berezin
National University of Kyiv-Mohyla Academy
Kyiv, Ukraine
e-mail: pavlo.berezin@gmail.com

The main challenge in developing of Ukrainian-language recognition models is the lack of a large dataset. This issue is especially acute for handwritten text, as there are practically no annotated datasets of this type in sufficient size. Researchers are trying to solve this problem using synthetic datasets. Authors do not have real-world data to verify their models' results, so they use a portion of their own data for testing.

The dataset's basis is “Collective Letters to Andrey Sheptytsky with Congratulations on Name Days and Jubilee Dates. Volume XI”, a scanned collection of handwritten letters in Ukrainian. The letters were scanned at high quality, 200 dpi, within the recommended text recognition range.

This dataset needed to be annotated first, as the archive preserved letters only in scanned format. To reduce the amount of manual labor, the data underwent preliminary processing. The pipeline had a high error rate, so the data was manually annotated afterwards on the CVAT platform.

As a result, a set of handwritten data was obtained that can be used for testing Ukrainian-language text recognition models. The final dataset includes 330 images, with 5451 bounding boxes and transcribed text defined for each line of text.

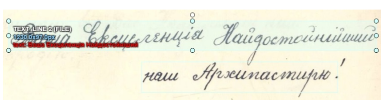

Рис. 1. Data sample.

CLARITY PRINCIPLES: ELIMINATING VISUAL NOISE FOR IMPACTFUL DATA STORYTELLING

Taras M. Bokalo [1] **, Oleksandra V. Sendriy** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] taras.bokalo@lnu.edu.ua,
[2] oleksandra.senrdiy@lnu.edu.ua

There is a story in your data, but your tools don't know what it is. That story is not just discovered, it is designed. This thesis presents a practical, design-focused framework for eliminating clutter and focusing on signal in data visualization. Through six essential steps ([1]) – understanding the context, choosing an appropriate visual display, eliminating clutter, focus attention, thinking like a designer, and telling a story – we explore the transition from raw data to compelling communication. Drawing upon Gestalt principles, preceptive attributes, and design thinking, this approach enables analysts and communicators to transform exploratory analysis into explanatory visuals that guide the audience, reduce noise, and clarify insights.

1. **Understand the Context**: Begin with exploratory analysis to learn what the data says. Then shift to explanatory analysis to frame that insight for a specific audience. Ask:
   - Who is the audience?
   - What do we want them to know or do?
   - How can data support that?
2. **Choose the Right Visual Display**: Use simple, familiar charts. Most messages can be clearly communicated using bar, line, or scatter plots.
3. **Eliminate Clutter**: Reduce noise by removing unnecessary elements. Use Gestalt principles – proximity, similarity, enclosure, closure, continuity, and connection – to group related data and simplify perception.

4. **Focus Attention**: Use preattentive attributes such as size, color, and position to draw the viewer's eye to the most important parts. Be intentional and avoid overuse.
5. **Think Like a Designer**: Create a clear visual hierarchy. Keep it clean, legible, and easy to interpret. If it's confusing, people will blame themselves – not the graph.
6. **Tell a Story**: Use visuals and supporting text to guide the audience. Label clearly, highlight key points, and build a narrative that connects data to decisions.

Communicating with data is not a technical exercise, it is a craft. By understanding context, intentionally designing and telling a story, we can remove noise and reveal the signal. This thesis offers a replicable framework for doing just that, enabling analysts to create data visualizations that not only look good, but also work powerfully to inform, persuade, and drive action.

1. Knaflic C.N. *Storytelling with Data: a Data Visualization Guide for Business Professionals.* John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2015.
2. Maheshwari A.K. *Business Intelligence and Data Mining. Made Accessible.* Anil K. Maheshwari, Ph.D., 2015.

EFFICIENT TRANSFORMER-BASED TRACKING FOR EDGE DEVICES

Vasyl Y. Borsuk
Lviv Polytechnic National University
Lviv, Ukraine
e-mail: vasyl.y.borsuk@lpnu.ua

Visual object tracking aims to locate a target in video frames given its initial position and is vital for applications such as robotics, surveillance, and autonomous navigation. While transformer-based trackers have shown strong performance, their high computational cost limits their deployment on resource-constrained edge devices.

To address this, we build upon the efficient HiT [1] (Hierarchical Transformer for Tracking) framework and propose a lightweight extension that incorporates multimodal data - specifically natural language descriptions - via parameter-efficient adapters. These adapters are integrated into the transformer's attention layers, allowing the model to leverage text cues for enhanced target understanding without significant overhead. This multimodal fusion improves robustness in challenging scenarios, such as object occlusion, cluttered backgrounds, or appearance ambiguity. Our approach preserves the real-time capabilities of the original HiT model while introducing minimal additional computational cost, making it suitable for deployment on edge devices like the Nvidia Jetson AGX.

1. Kang B., Chen X., Wang D., Peng H., Lu H. *Exploring lightweight hierarchical vision transformers for efficient visual tracking.* In: Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2023. 9612-9621.

ASSETS CORRELATIONS AND EFFICIENT FRONTIER

Anton M. Bryk [1] **, Kostiantyn A. Tchervinka** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] anton.bryk@lnu.edu.ua
[2] kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua

The problems of finding an optimal portfolio remain highly important today because they directly impact how to manage risk, allocate capital, and pursue returns in a complex and uncertain financial environment. The investigation of optimal portfolio problems has a lot common with both data analysis and mathematical modeling. For instance historical returns and covariances are estimated using time series data, techniques like regression or factor analysis are used to understand asset behaviors and dependencies, the Markowitz model minimizes portfolio variance subject to return constraints.

In the Markowitz Modern Portfolio Theory framework, the efficient frontier represents the set of optimal portfolios that offer the highest expected return for a given level of risk, or equivalently, the lowest risk for a given level of expected return. This study examines how asset correlations impact the shape of the Markowitz efficient frontier. Asset correlations play a central role because they directly influence portfolio risk (variance) through the effects of diversification. When the x-axis represents portfolio risk (standard deviation) and the y-axis represents expected return, the efficient frontier bends leftward as the average correlation among assets decreases from 1 to -1, reflecting improved diversification. To model this behavior in the case of more than two assets, the Monte Carlo method is employed.

1. Markowitz H. *Portfolio Selection.* Journal of Finance. 1952; 7 (1): 77-91.

COMPLEX NETWORKS APPLICATIONS IN DATA SCIENCE

Khrystyna Buhrii
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: khrystyna.buhrii@lnu.edu.ua

Traditional tabular data storages can not handle high-dimensional and interconnected data efficiently, which is one of the challenges of the data science. Complex networks allow modeling the relationships and interactions within the structured data, uncovering hidden patterns in data, and therefore have multiple applications. We use complex networks to study epidemiologic models with vaccination strategies [1], and rumor spread models, and they can also serve as a basis for Graph Neural Networks (GNNs) and some recommendation systems.

Since real-world complex networks are known to be non-random, we describe an algorithm that generates synthetic network with the following properties: scale-free distribution (the presence of hubs in the network), small world property (small average length of the shortest path between nodes), tightly connected communities (high clustering coefficient and high transitivity). We provide an implementation of the described algorithm via Python programming language.

1. Buhrii Kh., Golovaty Yu. *SIR Models on Complex Networks and Impact of Vaccination.* 2023 IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies, ELIT 2023 – Proceedings, 2023. – P. 37-42. http://dx.doi.org/10.1109/ELIT61488.2023.10310758

SYMMETRIC PROBLEM FOR THE PARTICLE CHAIN ON THE LINE

Andriy Ya. Vus
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: andriy.vus@lnu.edu.ua

A onedimensional model of many particle system is investigated for the nearest neighbor interaction. The dynamics of a 'closed' chain is described by the Hamiltonian:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} V(x_i - x_{i+1}) \quad (x_{n+1} = x_1), \tag{1}$$

and of a 'broken' (non-periodic) – Hamiltonian:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i - x_{i+1}). \tag{2}$$

For both these systems for 4 or 5 particles, they can be located symmetrically with respect to the origin. After choosing also symmetric initial conditions, the Hamiltonian takes the common form

$$H^* = p_1^2 + p_2^2 + 2V(x_2 - x_1) + V_1(x_1) + V_2(x_2).$$

The properties of interaction potential V are considered under assumption that the corresponding reduced system has the first integral, polynomial of prescribed degree in the momenta. The functional equations for those potentials are obtained. The nonexistence of their nontrivial solutions is proved for interaction potentials vanishing at infinity.

1. Perelomov A.M. *Algebraical approach to the solution of one-dimensional model of N interacting particles*. Theor. Math. Phys. 1971; 6: 263-283.

FEATURE ENGINEERING FOR PREDICTING QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF AIR POLLUTION

Volodymyr Hura
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: volodymyr.gura@lnu.edu.ua

Formalisation of air pollution prediction using feature engineering via Fuzzy Logic enables improved accuracy of machine learning models. This approach involves creating physically relevant features such as atmospheric stability class.

Formalisation Steps

1. Input Data: Time-series data $D = \{(t_i, m_i, p_i)\}_{i=1}^{N}$, where t_i is time, fm_i is a vector of meteorological variables (wind speed U , solar radiation S , cloud cover C , temperature T , humidity H , pressure P , etc.) and temporal proxies (hour, day, month), and p_i is the measured PM2.5 concentration.

2. Feature Engineering (Stability Class FIS): A fuzzy inference system (FIS) maps the meteorological input to the Pasquill stability class SC .

Inputs: U, S, C .

Output: $SC \in \{A, B, C, D, E, F\}$.

Rules: IF-THEN rules based on the Pasquill criteria [1], e.g., IF (U is low AND S is high) THEN (SC is A).

Process: Fuzzification $\rightarrow$ Inference $\rightarrow$ Defuzzification yields sc_i for each t_i .

1. Pasquill F. *Atmospheric diffusion: The dispersion of windborne material from industrial and other sources*. 1962. D. Van Nostrand Company.

SYMMETRIC ALGEBRAIC CIPHER

Oleg Gutik [1], **Olha Popadiuk** [2], **Vitaly Vlasov** [3]
[1,2,3] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] oleg.gutik@lnu.edu.ua, [2] olha.popadiuk@lnu.edu.ua,
[3] vitaly.vlasov@lnu.edu.ua

Suppose A is the alphabet, $L \equiv |A|$ is alphabet size, and $\forall\, a_i \in A$ we have a mapping $a_i \mapsto i$.

We propose a following cipher algorithm in which every symbol z is modelled as a combination of another two symbols x, y:

$$z \mapsto (x, y) : \; x - y = z \mod L.$$

A random permutation σ acts as a secret key and is used to generate random y from given symbol x.

A cipher implementation is provided using Rust programming language with a Python wrapper built using PyO3 [1].

1. https://github.com/PyO3/pyo3

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ПОШУКУ АСОЦІАТИВНИХ ПРАВИЛ

Марта Т. Дашко
Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна
e-mail: marta.dashko@lnu.edu.ua

Для аналізу великих масивів даних активно застосовуються методи пошуку асоціативних правил. Проте складність полягає в тому, що кількість потенційних асоціацій зростає експоненційно зі збільшенням числа ознак у кожному випадку, що вимагає значних обчислювальних ресурсів. Тому для оптимізації процесу формування асоціативних правил використовуються підходи, які допомагають скоротити обсяг асоціацій для аналізу. Застосування методів пошуку асоціативних правил у медицині є особливо актуальним для виявлення зв'язків між захворюваннями та симптомами. Аналізуючи великі масиви медичних записів, ці методи можуть допомогти виявити неочевидні, але статистично значущі комбінації симптомів, які часто супроводжують певні захворювання. Наприклад, пошук асоціативних правил може виявити, що певна комбінація головного болю, втоми та запаморочення часто асоціюється з конкретним неврологічним розладом.

Із множини X можна виділити підмножину $Y \subseteq X$ предметів, які найчастіше зустрічаються: $\{x_5, x_8, x_9\}$, що дозволяють сформувати наступні бінарні асоціації: $x_5 \to x_8$; $x_8 \to x_5$; $x_5 \to x_9$.

Для аналізу отриманих бінарних асоціацій скористаємося низкою характеристик, що вказують на наявність у них можливих зв'язків [1, 2]:

1. Підтримка асоціативного правила – це кількість транзакцій, що містять як умову, так і наслідок.

$$S(x_i \to x_j) = P(x_i \cap x_j) =$$
$$= \frac{\text{кількість транзакцій, що містять } x_i \text{ та } x_j}{\text{загальна кількість транзакцій}}.$$

2. Достовірність асоціативного правила $x_i \to x_j$ є мірою точності правила і визначається як відношення кількості транзакцій, що містять і умову, і наслідок, до кількості транзакцій, що містять тільки умову.

$$C(x_i \to x_j) = \frac{P(x_i \cap x_j)}{P(x_i)} =$$
$$= \frac{\text{кількість транзакцій, що містять } x_i \text{ та } x_j}{\text{кількість транзакцій, що містять } x_i}.$$

3. Ліфт (оригінальна назва – «інтерес», також зустрічається термін «покращення») – це відношення частоти появи умови в транзакціях, що також містять і наслідок, до частоти появи наслідку в цілому.

$$L(x_i \to x_j) = \frac{C(x_i \to x_j)}{S(x_j)}.$$

Вважається, що ліфт є узагальненою мірою зв'язку двох предметних наборів: при $L > 1$ зв'язок позитивний, при $L = 1$ зв'язок відсутній, при $L < 1$ – зв'язок негативний.

У даній роботі проведено дослідження найпоширеніших методів пошуку асоціативних правил – Apriori, DHP, Partittion, AIS. Виконано якісний аналіз ефективності кожного підходу на основі набору даних, що містить зв'язки між захворюваннями та їхніми симптомами. Також здійснено порівняння результатів і розглянуто ефективність кожного алгоритму.

1. Moldavskaya A.V. *The method of forming multi-level sequential patterns.* Probl. Prohr. 2016; 2-3: 158-163.
2. Subbotin S.A., Oleynik A.A., Gofman E.A., Zaytsev S.A., Oleynik A.A. *Intelligent information technology for the design of automated systems for diagnosing and recognizing images.* Kharkiv: Smit, 2012.

ON OPTIMIZING LAPLACE TRANSFORM INVERSION FOR THE 3D INITIAL BOUNDARY VALUE HEAT PROBLEM

Svyatoslav Lavryk
Ivan Franko National University of Lviv,
Lviv, Ukraine
e-mail: sviatoslav.lavryk@lnu.edu.ua

A popular method of time variable semi-discretization for the nonstationary problems is the Laplace transform, which allows reducing the problem to a set of stationary problems. Using this approach, initial boundary value heat problem can be reduced to the set of boundary value problems for the Helmholtz equation.

An approximate solution of the original problem can be obtained by approximately integrating the inverse Laplace transform, in particular using sinc quadratures with a certain choice of integration contour in the complex plane, allowing to achieve high convergence rate [1].

We showed, that due to a symmetry of the quadrature nodes, the number of stationary problems can be decreased almost by a factor of 2.

The influence of the integration contour parameters on the approximation error is also researched.

Stationary problems are numerically solved using boundary integral equation approach applying Nystroem method, based on the quadratures for smooth surface integrals.

Numerical experiments support the expectations.

1. Lopez-Fernandez M., Palencia C. *On the numerical inversion of the Laplace transform of certain holomorphic mappings* // Appl. Numer. Mathematics, 2004, 51, pp. 289-303.

SCATTERING THROUGH δ'-LIKE COMBS

Stanislav Lavrynenko
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: stanislav.lavrynenko@lnu.edu.ua

We study an exactly solvable quantum model describing particle scattering in a potential formed by equally spaced δ'-type interactions, known as δ'_θ-combs. The model describes the scattering of a particle by localized dipoles in crystal structures, with the parameter θ defining the interface conditions.

We derive formulas for the transmission probability $T_n(\theta, k)$, where the potential is an array of δ'_θ-interactions of length n. The explicit formula for $T_n(\theta, k)$ was obtained in terms of Chebyshev polynomials, which allows us to precisely locate the resonance peaks and describe their dependence on θ and k. We prove that $T_n(\theta, k)$ is π-periodic and invariant under the transformations $\theta \mapsto -\theta$ and $\theta \mapsto \theta^{-1}$. For small θ, transmission occurs only within a narrow frequency range; as $\theta \to 1$, the system becomes nearly fully transparent. Thus, δ'_θ-combs act as selective quantum filters. For $\theta \neq 1$, the function T_n exhibits $n-1$ sharp resonances in the interval $(0, \pi)$ where $T_n = 1$, and decays rapidly outside. As $\theta \to 0$, transmission vanishes almost everywhere except at $k = \pi/2$.

The results were obtained in collaboration with Y. Golovaty and R. Hryniv.

1. Golovaty Y., Hryniv R., Lavrynenko S. *Transmission resonances in scattering by δ'-like combs.* 2025. arXiv preprint arXiv:2503.23837.

SOFTWARE RISK ASSESSMENT MODELING

Mariia Lyashkevych
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: mariia.liashkevych@lnu.edu.ua

A software risk assessment model was refined, taking into account the SDLC stages, components, and requirements [1, 2].

Structural sets:

- a set of SDLC stage: $S = \{s_1, ..., s_k\}$
- a set of software components at stage s_1: $C = \{c_1, ..., c_n\}$
- a set of requirements: $Q = \{q_1, ..., q_l\}$
- a set of potential risks: $R = \{r_1, ..., r_m\}$
- mapping requirements to components: $Trace : Q \mapsto 2^C$

Risk functions:

- probability of risk occurrence r for component c: $V(c, r) \in [0, 1]$
- the impact of risk r on component c: $I(c, r) \in R^+$
- a source of risk: $S(r) \in S \cup Q \cup C$

Risk assessment:

- component risk: $RE(c, r) = V(c, r) * I(c, r)$
- stage risk: $RE(s, \mu) = \sum_{c \in Cs,\mu} \sum_{r \in R} RE(c, r)$
- requirement risk: $RE(g \pm j) = \sum_{c \in Trace(q_1)} \sum_{r \in R} RE(c, r)$

1. Lyashkevych M., Lyashkevych V., Shuvar R. *Risks Attribute Values Evaluation in Software Engineering by Monte Carlo Simulation.* IEEE 13th International Conference on Electronics and Information Technologies (ELIT), 2023.
2. Lyashkevych M., Rohatskiy I., Lyashkevych V., Shuvar R. *Software risk taxonomy creation based on the comprehensive development process.* Electronics and Information Technologies. 2024; 27: 59-71.

AI APPROACHES FOR QUALITATIVE AND QUANTITATIVE NEWS ANALYTICS ON PUBLIC OPINIONS

Bohdan M. Pavlyshenko

Ivan Franko National University of Lviv

Lviv, Ukraine

e-mail: b.pavlyshenko@gmail.com

We consider the use of GPT models with retrieval-augmented generation (RAG) for qualitative and quantitative analytics on public opinions in different news sources. For analytics, we used a two level RAG approach: on the first level, the GPT model generates qualitative news summaries and quantitative opinion scores using zero-shot prompts; on the second level, the GPT model generates the summary of news summaries for specified time period. Quantitative news opinion scores generated by the GPT model were analysed using Bayesian regression to get trend lines. The distributions found for the regression parameters make it possible to analyse an uncertainty in the specified news opinion score trends. The obtained results demonstrate that using GPT models for news analysis can yield informative qualitative and quantitative analytics, providing important insights.

The dynamic model based on neural ordinary differential equations was considered for modelling public opinion. This approach makes it possible to analyse different scenarios for evolving public opinions.

FINE-TUNING AND METRICS-BASED COMPARISON FOR GPT-BASED LARGE LANGUAGE MODELS

Bohdan M. Pavlyshenko [1] **, Ivan I. Bulka** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] b.pavlyshenko@gmail.com,
[2] ivan.bulka@lnu.edu.ua

Fine-tuning of large language models [1] is a resource-intensive challenge. Due to the complexity and sophistication of the models, the fine-tuning process can be not only time-consuming but also costly. However, strategies such as Parameter Efficient fine-tuning, Low-Rank Adaptation (LoRA) [2], and Quantized Low-Rank Adaptation (QLoRA) [3] offer possible simplification solutions. These strategies are designed to minimize the inefficiencies in current fine-tuning methods, hence potentially reducing the time and financial investment involved.

Fine-tuning alone, nonetheless, is not enough. It's essential to evaluate [4] how efficiently models can solve required tasks. These evaluations are mandatory in order to understand the actual applicability of the models that have been fine-tuned. Additionally, it's important to create a metric-based comparison approach. Such an approach offers a standardized methodology for assessing the models. It helps us compare different fine-tuned models and the efficiency of the fine-tuning itself, thereby providing a comprehensive understanding of the performance and effectiveness of each model.

1. Kasneci E., et al. *ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education.* Learning and individual differences. 2023; 103: 102274.
2. Li Y., Yu Y., Liang C., He P., Karampatziakis N., Chen W., Zhao T. *Loftq: Lora-fine-tuning-aware quantization for large language models.* 2023. arXiv preprint arXiv:2310.08659.

3. Dettmers T., Pagnoni A., Holtzman A., Zettlemoyer L. *Qlora: Efficient finetuning of quantized llms.* Advances in neural information processing systems. 2023; 36: 10088-10115.
4. Li J., Li R., Liu Q. *Beyond static datasets: A deep interaction approach to llm evaluation.* 2023. arXiv preprint arXiv: 2309. 04369.

IMPROVING FAKE NEWS DETECTION USING NAMED ENTITY RECOGNITON

Bohdan M. Pavlyshenko [1] **, Ihor V. Drozdov** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] b.pavlyshenko@gmail.com, [2] ihor.drozdov@lnu.edu.ua

Detecting fake news is a critical task in the digital age, where misinformation can spread rapidly, affecting public opinion and the stability of society. Nowadays, deep learning and transformer models demonstrate excellent results in text understanding and fake news detection [1, 2]. The integration of named entity recognition methods can increase accuracy and efficiency, as it provides an opportunity to consider the latter's contextual impact on the detection of fake news.

Named entities can add a significant semantic load based on pre-processed data and statistical analysis to increase text understanding. Combining named entities with text can increase the amount of contextual information for misinformation detection. Compared to basic text-only methods, preliminary experiments have demonstrated that including NER-based characteristics improves overall performance indicators. These results suggest significant potential for practical application, supporting faster and more reliable fact-checking processes.

1. Pavlyshenko B. *Analysis of disinformation and fake news detection using fine-tuned large language model.* 2023. arXiv preprint arXiv:2309.04704.
2. Pavlyshenko B. *Methods of informational trends analytics and fake news detection on twitter.* 2022. arXiv preprint arXiv:2204.04891.

TRANSFORMER SENSITIVITY TO AUGMENTATION COMPLEXITY

Bohdan M. Pavlyshenko [1], **Mykola I. Stasiuk** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] bohdan.pavlyshenko@lnu.edu.ua,
[2] mykola.stasiuk@lnu.edu.ua

Transformer models [1], have revolutionized Natural Language Processing (NLP) by capturing complex contextual relationships within text. Their deep architectures and attention mechanisms enable state-of-the-art performance across various tasks. However, these models, particularly larger ones, require substantial training data to generalize effectively. Data augmentation becomes crucial to mitigate data scarcity and enhance model robustness. By introducing diverse variations of existing data, augmentation techniques, ranging from simple synonym swaps to complex embedding manipulations, can significantly improve a transformer's ability to handle unseen data and complex linguistic phenomena. Understanding how different transformer architectures respond to varying augmentation complexities is essential for optimizing model performance and ensuring reliable NLP applications [2, 3].

1. Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Polosukhin, I. *Attention is all you need.* Adv. Neural Information Processing Systems. 2017, 30.
2. Pavlyshenko B., Stasiuk M. *Using Large Language Models for Data Augmentation in Text Classification Models.* Ternopil: International Journal of Computing, 2025.
3. Pavlyshenko B., Stasiuk M. *Data augmentation in text classification with multiple categories.* Lviv: Electronics and Information Technologies, 2024.

ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ У ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ВЕКТОРНИХ ОБ'ЄКТІВ

Дмитро Паламарчук
Національний університет "Львівська політехніка"
Львів, Україна
e-mail: dmytro.y.palamarchuk@lpnu.ua

Задача оптимального розміщення векторних об'єктів на площині є актуальною через велику кількість комбінацій позицій та обертань. Повний перебір є надто ресурсомістким, тому ефективним підходом є використання евристичних методів, зокрема генетичного алгоритму.

Нове покоління формується шляхом комбінації різних джерел хромосом для збереження кращих рішень і підтримки різноманіття. Розподіл виглядає так: 20% – елітні хромосоми, 10% – випадкові з попередньої популяції, 20% – кросовер, 20% – кросовер із кластеризацією, 20% – кросовер із мутацією, 10% – повністю нові випадкові рішення.

Кожне рішення оцінюється шляхом обчислення коефіцієнта якості як відношення площ:

$$Q = \frac{S_{\text{фігур}}}{S_{\text{використана область}}}$$

Алгоритм для кожної фігури виконує обертання, дискретизацію в піксельну матрицю та пошук оптимальної позиції. Експериментально встановлено: зменшення розміру клітини підвищує якість розміщення, але збільшує час обробки.

1. Palamarchuk D.Yu., Tymchenko O.V., Demchenko V.O. *Application of optimization methods in the problem of placing vector graphic objects on a plane.* Scientific notes. 2024; 68 (1): 61-70.

AUDIO DEEP WATERMARKING APPROACH BASED ON ALGEBRAIC TRANSFORM

Dmytro Peleshko[1], **Olena Vynokurova**[2], **Severyn-Dmytro Peleshko**[3], **Marta Peleshko**[4]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*
[3] *Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine*
[4] *Lviv State University of Life Safety, Lviv, Ukraine*
e-mail: [1] dpeleshko@gmail.com, [2] vynokurova@gmail.com,
[4] marta.peleshko@gmail.com

Currently, watermarking technology is extensively used to protect multimedia data, ensuring the protection and authenticity of digital content. The technique involves inserting watermarks into media signals, achieved by embedding them in specific areas within either the sample domain or a suitably altered domain. In this paper, we introduce a novel invisible audio watermarking approach that utilizes algebraic transformations. This approach ensures that the watermark remains undetectable to human perception while remaining resilient to various alterations and compression of the signal. Our method relies on a deep neural network framework, adapted from the Resdep and ResIndep architectures, with modifications designed to optimize the watermarking process. A standout feature of this architecture is its innovative handling of audio signals, avoiding dependence on spectral properties or direct time-domain transformations. Instead, it focuses on embedding the watermark to maximize durability against audio processing techniques such as compression, noise, and filtering. The proposed technique excels at preserving the integrity of the watermarks under conditions that typically affect audio quality, such as MP3 compression. By moving away from conventional spectral analysis and prioritizing algebraic transformations in time domain, this technology establishes a new benchmark for robust, invisible audio watermarking.

РІВНЯННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ У РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Володимир О. Пелих [1] **, Юрій В. Тайстра** [2]

[1,2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України*

Львів, Україна

e-mail: [1] vpelykh@gmail.com,

[2] ythelloworld@gmail.com

Основною властивістю, яка виділяє рівняння хвильових фізичних полів у класі усіх гіперболічних рівнянь, є притаманна їм властивість коваріантності відносно певних груп перетворень – довільних глобальних чи локальних Лоренца. Це має своїм наслідком, як встановлено ще Ріманом і Гільбертом та використано Айнштайном при створенні загальної теорії відносності, потребу доповнення рівнянь поля додатковими рівняннями, т. зв. координатними чи калібрувальними умовами. Ми подаємо в історичному розвитку (Гільберт, Айнштайн, Де Дондер, Шапіро, Сінг, Інфельд, Петров, Пелих) пошуки строгих обґрунтувань для можливості доповнення рівнянь поля додатковими рівняннями. Запровадження Віттеном рівняння Сена-Віттена при побудові альтернативного до Шена-Яу доведення теореми про додатну визначеність гравітаціййеої енергії стало наслідком калібрувальної свободи, як це було показано Пелихом після узагальнення ним на випадок системи спінорних рівнянь теореми Скоробогатька про коливальність розв'язків самоспряженого рівняння другого порядку.

Застосовуючи метод Ньюмена-Пенроуза у його спінорній інтерпретації та калібрувальні умови Кіннерслі для зображення системи рівнянь Максвелла у метриці Керра, що описує поле обертової чорної діри, як системи рівнянь першого порядку, Пелих та Тайстра отримали у аналітичному вигляді розв'язки класу C^1 . Вони є загальними у класі ізотропних однонаправлених.

Отримано також розв'язки з відокремленими змінними, які збіглися із розв'язками Чандрасекара. Отримане рівняння фазової поверхні узагальнює вираз Новікова і Фролова для фазової (характеристичної) поверхні рівнянь Максвелла у полі Шварцшільда, а відповідна поверхня, названа нами сфероїдним гелікоїдом, не є замкненою. Це є наслідком присутності у метриці Керра недіагонального елемента. Іншим наслідком його присутності є неінтегровність ортогонального доповнення часоподібного розподілу у дотичному розшаруванні – з геометричної точки зору, або неможливість синхронізувати годинники у скінченній області тривимірного простору – з фізичної точки зору. У зв'язку із цим у просторі-часі Керра перестає бути змістовним, оскільки не є спостережуваним жодною системою спостерігачів, поняття характеристичної поверхні, на якій можливі розриви похідних, і яка описує поширення фронту поширення хвилі, як також втрачають змістовність усі поняття хвильової оптики – фаза, хвильовий вектор. Тим не менше зберігають змістовність локальні характеристики хвиль, які обчислюємо за знайденими розв'язками – кут еліптичності та поляризаційний кут. На цій основі даємо точне значення кута повороту площини поляризації електромагнітної хвилі, випроміненої з мінімально можливої стабільної орбіти – ISCO. Його величина допускає виявлення сучасними земними та космічними засобами.

RELATIONS BETWEEN CONVERGENCE METRICS IN GENETIC ALGORITHMS

Vitalii O. Pretsel
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: vitalii.pretsel@lnu.edu.ua

Preserving population diversity in genetic algorithms (GA) is crucial to prevent premature convergence and to ensure the discovery of high-quality solutions. Over the years, numerous methods have been developed to address this challenge. Evaluating and comparing the effectiveness of these methods remains complex due to the multifaceted nature of diversity and convergence.

In this study, we explore a range of genotypic and phenotypic diversity metrics to better understand their relationship with convergence behavior. Building on the comparative analysis presented in [1], we use a range of metrics along with additional statistical indicators, to provide a more comprehensive view of population dynamics.

We calculate these metrics for a set of functions representing a variety of fitness landscapes. For each experimental run, we monitored the generation at which convergence was detected and investigated how different metrics behaved when convergence was close.

Our objective is to determine what diversity metrics signal the onset of convergence, and how these indicators correlate with one another across function types.

1. Pandey H.M., Choudhary A., Mehrotra D. *A Comparative Review of Approaches to Prevent Premature Convergence in GA*. Applied Soft Computing Journal, 2014, http://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2014.08.025

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА РОЗТЯГУ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА ТРІЩИНОЮ З ПЛАСТИЧНИМИ ЗОНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ УМОВИ ПЛАСТИЧНОСТІ ТРЕСКА-СЕН-ВЕНАНА

Микола Слободян [1], Максим Шайнога [2], Лукіян Маркевич [3]

[1,2,3] *Львівський національний університет імені Івана Франка Львів, Україна*

e-mail: [1] mykola.slobodyan@lnu.edu.ua,
[2] maksym.shainoha@lnu.edu.ua, [3] lukiian.markevych@lnu.edu.ua

Розв'язано задачу про двосторонній розтяг безмежної ізотропної пластини з круговим отвором та наскрізною прямолінійною радіальною тріщиною. Межа кругового отвору та береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження на нескінченності на продовженні тріщини утворилися пластичні зони, для яких виконуються умови пластичності Треска-Сен-Венана.

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі, розв'язок сформульованої задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь на берегах тріщини та у пластичних зонах. Крайові умови на межу кругового отвору вдалося задовольнити аналітично. Проведено числовий аналіз довжин пластичних зон при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR FRICTIONAL CONTACT FOR STUDYING THE DEFORMATION OF COMPOSITE STRUCTURES WITH THIN RIBBON INCLUSIONS

Heorgiy Sulym[1], **Yosyf Piskozub**[2], **Nazar Oliyarnyk**[3], **Liubov Piskozub**[4]

[1] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NASU, Lviv, Ukraine*

[2,3,4] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

[2] *Cracow University of Technology, Cracow, Poland*

e-mail: [1] gtsulym@gmail.com, [2] yosyf.z.piskozub@lpnu.ua, [2] yosyf.piskozub@pk.edu.pl, [3] nazar.r.oliyarnyk@lpnu.ua, [4] liubov.g.piskozub@lpnu.ua

Thin inclusions, cracks, and other structural defects in construction materials either cause undesirable high stress concentrations or are elements of smart materials' structure. The nonlinearity of physical and mechanical properties of such heterogeneities, imperfect kinematic contact between components with uncertainty in their contact area in case of possible disruption, have not been sufficiently studied.

A methodology for studying the influence of nonlinear physical and kinematic characteristics on the deformation of a body with an interphase thin inclusion is proposed. The approach is based on the jump function method and the apparatus of singular integral equations. The results of calculations of the stress-strain state in the vicinity of the considered heterogeneities, obtained on the basis of this approach, can be applied from a unified position both in the theory of composites within the framework of meso- or micromechanics, as well as in nanomechanics or geomechanics, microelectronics, fracture mechanics, materials science, etc.

ON THE INFLUENCE OF KEYPOINTS QUANTITY IN FILTERING-BASED IMAGE MATCHING

Andriy V. Fesiuk [1] **, Yuriy M. Furgala** [2]
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] andrii.fesiuk@lnu.edu.ua, [2] yuriy.furhala@lnu.edu.ua

Accurate image matching in computer vision often relies on keypoints detectors, such as SIFT, SURF, ORB, and BRISK, combined with filtering methods like RANSAC and its USAC variants to remove false correspondences. While algorithm selection is typically considered a significant factor, the number of keypoints involved also significantly influences the quality and efficiency of matching [1]. Experimental analysis reveals a nonlinear and method-sensitive relationship between keypoints quantity and performance. A larger number of keypoints does not guarantee better outcomes and may instead introduce instability and higher processing costs. On the other hand, too few keypoints might lead to a loss of relevant matches [2]. Exploring this relationship is important for understanding how data volume affects the behaviour of filtering algorithms under different conditions. Identifying the optimal keypoints range allows a better trade-off between matching accuracy, robustness, and computational efficiency, essential for designing effective and scalable computer vision systems.

1. Fesiuk A., Furgala Y. *The Impact of Parameters on the Efficiency of Keypoints Detection and Description.* Lviv: ELIT, 2023.
2. Fesiuk A., Furgala Y. *Keypoints on the images: Comparison of detection by different methods.* Lviv: Electronics and information technologies, 2023.

USING THE BELIEF RULE BASE APPROACH TO BUILD AN INTERPRETABLE CLASSIFICATION MODEL

Markiyan Fostyak [1], **Lidia Demkiv** [2]
[1,2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] markiyan.fostyak@gmail.com, [2] lidiya.demkiv@lnu.edu.ua

When developing credit-worthiness assessment systems from open-banking data it is crucial to account for possible inconsistencies. In practice, customers with similar financial profiles sometimes receive different credit-rating classes. This lowers classification accuracy and blurs the resulting class-probability estimates. Combining the Belief Rule Base (BRB) framework with modern machine-learning models preserves predictive accuracy while providing decision-level interpretability – an essential requirement for financial applications operating under high uncertainty [1].

In this study we design a BRB rule set and aggregate its outputs with Evidential Reasoning (ER) for a financial profile described by six variables: periodic income, non-periodic income, periodic expenses, risky expenses, non-risky expenses, and the difference between income and expenses. The dataset is synthesised from open-banking transaction streams through aggregation, categorisation, and anonymisation.

Each of the ten BRB rules is represented as a set of weighted hypotheses with associated belief degrees and an overall rule weight reflecting its importance. Reference values and linguistic output states are specified. ER algorithms are then applied to combine several partially activated rules, yielding a final inference expressed as a set of hypotheses with belief degrees.

1. Hu G., Hi W. at all. *Hierarchical belief rule-based model for imbalanced multi-classification.* Expert Systems with Applications 216, 119451, 2023.

MATHEMATICAL MODELING OF TRANSFER PROCESSES IN A LAYER UNDER EXPERIMENTAL DATA AT THE BODY BOUNDARY

Olha Y. Chernukha [1] **, Halyna I. Bilushchak** [2] **,**
Yurii I. Bilushchak [3]
[1,2] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[3] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine*
e-mail: [1] olha.yu.chernukha@lpnu.ua,
[2] halyna.i.bilushchak@lpnu.ua, [3] byixx13@gmail.com

The need to develop modern approaches for reliable prediction of processes and phenomena necessitates the development of new methods of modeling of non-equilibrium processes in natural or artificial objects. For such systems, based on physical considerations, it is not always possible to correctly impose boundary conditions on the body boundaries, even in a sufficiently general form. Here, we consider a parabolic initial-boundary value problem in a layer when experimental data on the desired function are available at one of the boundaries. A regression model is constructed using the least squares method, which is considered as a boundary condition. The solution to the problem is found using the integral transform. The reliable intervals for the regression and the desired function are obtained as well as two-sided statistical estimate of the problem solution. A formula for determining the two-sided critical region is found by the Fisher criterion and analyzed. The influence of the statistical characteristics of the sample on the desired function at the layer lower boundary is investigated on specific examples. We consider the cases of samples of large and small sizes, which characterized by large or small variance, at large or small time intervals. The numerical analysis of the solution to the initial-boundary value problem depending on the statistical characteristics of the sample at the layer lower boundary is carried out.

MATHEMATICAL MODELING OF IMPURITY DIFFUSION IN A STRIP UNDER GIVEN STATISTICS OF POINT MASS SOURCES SYSTEM

Yurii A. Chernukha[1], **Petro Y. Pukach**[2]
[1,2] *Lviv Polytechnic National University*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] yurii.a.chernukha@lpnu.ua, [2] petro.y.pukach@lpnu.ua

A mathematical model is developed to describe impurity diffusion within a strip influenced by a system of randomly located internal point mass sources. In this model, we consider various probabilistic distributions of point sources of different power over a designated subregion of the body. The formulation of the random initial-boundary value diffusion problem is based on Fick's two laws. The overall solution to the nonhomogeneous problem is obtained as a sum of the solution to the corresponding homogeneous problem and the convolution of the Green's function with the stochastic point sources. Then, the stochastic averaging is carried out for uniform and triangular distributions as well as two specific cases of beta-distribution both over the internal region of the point sources action and over the entire body. Explicit expressions for the impurity concentration under given initial and boundary conditions have been derived. Based on the obtained calculating formulas, software has been developed for simulating the averaged impurity concentration under different probabilistic distributions of sources and for computing the second moments of the concentration field. The analysis focuses not only on the averaged concentration of the impurity but also on its statistical properties, including the variance and spatial correlation. The impact of various parameters, including the location and size of the source's action region, the specific arrangement of impurity sources, and the effect of an overwhelmingly powerful source has been assessed.

MATHEMATICAL MODELING OF IMPURITY DIFFUSION IN A MULTIPHASE RANDOMLY NONHOMOGENEOUS BODY WITH SPHERICAL INCLUSIONS

Anastasiia Y. Chuchvara
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine
e-mail: davydoka@gmail.com

Diffusion processes in a porous medium modeled by a layer of solid material with randomly located spherical inclusions of different phases and radii with the possibility of introducing several effective diameters for one material are investigated. The contact-initial boundary value problem is formulated in a three-dimensional setting; in particular, the diffusion equation is constructed for simply connected domains of each phase with nonideal contact conditions at the interphase boundaries for the concentration of the migrating substance. Using the apparatus of the theory of generalized functions, the original problem of diffusion is reduced to the mass transfer equation for the whole body. An integro-differential equation equivalent to the obtained problem is constructed. The solution of the integro-differential equation is obtained by the method of successive iterations in the form of an integral Neumann series. The averaging procedure is carried out over the ensemble of phase configurations with a uniform distribution of spherical inclusions in the body. The calculation formula is obtained for determining the concentration field of a migrating substance in the layer containing randomly located spherical inclusions of different physical properties (phases) and various characteristic radii. Software modules for numerical analysis are developed, the dependences of the concentration on the medium parameters, in particular, the effective diffusion coefficients, the density of inclusions and their volume fractions or radii, are investigated.

CONCEPT DRIFT HANDLING IN ENSEMBLE SYSTEMS: A MODULAR APPROACH

Khrystyna R. Shakhovska
Lviv Polytechnic National University
Lviv, Ukraine
e-mail: khrystyna.r.shakhovska@lpnu.ua

Conceptual drift occurs when underlying patterns change over time, making it essential to adapt models for sustained accuracy. As a reference the ROSE algorithm [1] was used. It is an ensemble learning framework for online, imbalanced, and drifting data. It adapts to concept drift, handles class imbalance with self-adjusting bagging, and optimizes performance, efficiency, and memory use.

This work proposes method for real-time predictive tasks with concept drift, consisting of four key components: drift detection, ensemble evaluation, adaptive model update, and retraining control. Drift detection is performed using dual sliding windows that track prediction error over time, with statistical tests applied to detect significant performance degradation. Ensemble evaluation continuously monitors the performance of base models, pruning underperforming ones and ensuring model diversity. Upon drift detection, the adaptive model update component prunes poor models and retrains new ones based on recent data, while retaining resilient models to preserve useful knowledge. Finally, retraining control adjusts system parameters, such as window size and pruning rates, dynamically optimizing the system's response to drift and maintaining computational efficiency.

1. Cano A., Krawczyk B. *ROSE: robust online self-adjusting ensemble for continual learning on imbalanced drifting data streams*. Machine Learning. 2022; 111 (7): 2561-2599.

COMPARATIVE ANALYSIS OF AUTOMATED METRICS FOR ASSESSING IMAGE QUALITY GENERATED BY GAN

Volodymyr S. Yakymiv [1] **, Yosyf Z. Piskozub** [2]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

[2] *Cracow University of Technology, Cracow, Poland*

e-mail: [1] volodymyr.s.yakymiv@lpnu.ua,

[2] yosyf.z.piskozub@lpnu.ua

Researches [1, 2] aimed at the possibility of using AI GAN models for dynamic image generation for works of art has shown the need for automatic metrics that allow objectively assessing the quality of results in accordance with subjective human perception. Of all the evaluation methods analyzed, the Inception Score and CLIPScore algorithms meet the research criteria to the greatest extent.

Inception Score algorithm is used to obtain a conditional distribution of labels $p(y|x)$. If there are significant objects in the image, the corresponding conditional distribution should be characterized by low entropy and can be calculated using formula:

$$IS(G) = exp(E_{x \sim pg} D_{KL}(p(y|x) \parallel p(y))). \tag{1}$$

Contrastive Language-Image Pretraining (CLIPScore) is a widely accepted approach for quantifying the similarity between an image generated by a GAN model and its corresponding textual description using the following formula:

$$CLIPScore(I, C) = max(100 \;\; cos(E_I, E_C), 0). \tag{2}$$

1. Yakymiv V.S., Piskozub Y.Z. *Research on the use of AI for Selecting Abstractions for Natural Language Image Generation Tools.* International Journal of Computing, 2024.
2. Yakymiv V.S., Piskozub Y.Z. *Comparison of the use of AI services based on general natural language for generating images for fiction.* Math. Modeling and Computing, 2025.

AUTOREGRESSIVE MONITORING MODEL FOR ELECTRICITY CONSUMPTION

Maksym Yakubovych
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: maksym.yakubovych@lnu.edu.ua

Assuming $E(t)$ represents the amount of electricity consumed at a time t. It means, we can represent the collected data of this consumption using a time series, where t is a time variable and $E(t)$ is the amount of energy consumed from time t_0 to time t. Thus, electricity consumption using the autoregressive model can be written as follows:

$$E(t) = c_0 + c_1 * E_{t-1} + c_2 * E_{t-2} + ... + c_p * E_{t-p} + \mu(t) * E(t) =$$
$$= c_0 + c_1 * E_{t-1} + c_2 * E_{t-2} + ... + cp * E_{t-p} + \mu(t),$$

where: $E(t)$ is a amount of electricity consumed at time t, c_0, c_1, c_2, ..., c_p are autoregression coefficients, that determine the influence of past values on the current value, $\mu(t)$ is a model error.

This model assumes that the energy consumed at a given time depends on the energy consumed at previous times with a certain delay p.

1. Yakubovych M.Y., Lyashkevych V.L., Shuvar R.Y. *Energy Conservation as One of the Components of the Management System for the Smart Sustainable Workspaces.* Electronics and Information Technologies. 2025; 29, 79-94. DOI: https://doi.org/10.30970/eli.29.8.

ENHANCING WEB APPLICATION SECURITY THROUGH UNDERUTILIZED CONTROLS OF NIST 800-53

Sviatoslav Zlatous[1], **Petro Venherskyi**[2]
[1,3,4] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] zlatous.svyatoslav@gmail.com,
[2] petro.vengersky@gmail.com

While NIST Special Publication 800-53 is widely recognized for its comprehensive catalog of security and privacy controls, its direct and systematic application to web applications is often incomplete or limited to high-level policies. This research bridges the gap by exploring how lesser-known or underutilized controls from NIST 800-53 can be pragmatically applied to enhance the security posture of web applications. It introduces original case studies and practical configurations and proposes a framework for prioritizing control families in DevSecOps pipelines.

(1) Control Mapping: Beyond the Obvious
(2) Automated Enforcement of Security Controls in CI/CD Pipelines
(3) Case Study: Integrating AU and IR Controls in Web Logs
(4) Underutilized Controls for Front-End Security
(5) A Metric-Based Framework for Web Control Prioritization
(6) Privacy Engineering with AP and PT Controls
(7) Comparative Analysis with OWASP ASVS

This work aims to provoke a shift in how NIST 800-53 is perceived not merely as a compliance checklist for federal systems, but as a flexible, modular toolkit for securing modern web applications. By operationalizing underutilized controls, we can achieve stronger, privacy-conscious, and more resilient web platforms.

RETAIL SALES FORECASTING USING ARIMA AND LSTM MODELS

Oleksii I. Kachmar [1], **Roman Ya. Shuvar** [2], **Igor I. Kolych** [3]
[1,2,3] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] kachmar.oleksii@gmail.com, [2] roman.shuvar@lnu.edu.ua,
[3] igor.kolych@lnu.edu.ua

Forecasting retail sales is crucial for effective inventory and supply chain management. In this study, we compare traditional and machine learning-based approaches on the M5 dataset, which contains daily sales of over 30,000 Walmart store-item pairs. Three forecasting strategies are evaluated: (1) a baseline ARIMA model incorporating autoregressive and moving average components, (2) a trend-seasonality decomposed ARIMA model, and (3) a Long Short-Term Memory (LSTM) neural network using recursive multi-step forecasting.

Forecast accuracy was assessed using Mean Absolute Error (MAE). The decomposed ARIMA model achieved the best performance with a test MAE of 21.83 units, outperforming both the plain ARIMA (26.86) and LSTM (92.20). Residual analysis confirmed that seasonal decomposition significantly reduced autocorrelation and improved error distribution. While LSTM models are theoretically well-suited for complex patterns, their effectiveness was limited by recursive error accumulation and architectural constraints.

These findings support the use of seasonally-enhanced ARIMA models in retail scenarios characterized by strong weekly patterns. Although neural networks offer future potential, classical models remain robust and interpretable. Future work will explore hybrid and sequence-to-sequence models for hierarchical and long-horizon forecasting.

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Національний університет “Львівська політехніка”
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Всеукраїнська наукова конференція

“Диференціальні рівняння і аналіз даних”

8 – 9 травня, 2025, Львів, Україна