Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
Національний університет "Львівська політехніка"

ДРУГА ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА

КОНФЕРЕНЦІЯ

Диференціальні рівняння і аналіз даних

присвячена 120-річчю

академіка Я. Б. Лопатинського

та 80-річчю професора С. П. Лавренюка

19 – 21 листопада, 2026, Львів, Україна

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Львів – 2026

Ministry of Education and Science of Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine
Lviv Polytechnic National University

SECOND SCIENTIFIC CONFERENCE

Differential Equations and Data Analysis

Lviv 2026

(DEDAL-2026)

dedicated to the 120th anniversary

of the academician Ya. B. Lopatynsky

and to the 80th anniversary

of the professor S. P. Lavrenyuk

19 – 21 November, 2026, Lviv, Ukraine

BOOK OF ABSTRACTS

Lviv 2026

ДРУГА ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І АНАЛІЗ ДАНИХ

19 – 21 листопада, 2026, Львів, Україна

ОРГАНІЗАТОРИ КОНФЕРЕНЦІЇ

– Міністерство освіти і науки України
– Львівський національний університет імені Івана Франка
– Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
– Національний університет "Львівська політехніка"

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

Бак С.М., Бігун Я.Й., Бокало М.М., Бугрій О.М., Буряченко К.О., Головатий Ю.Д., Городецький В.В., Гринів Р.О., Гринькевич О.С., Дрінь Я.М., Євтухов В.М., Єлейко Я.І., Ільків В.С., Каленюк П.І., Когут П.І., Конет І.М., Кочубей А.Н., Кирилич В.М., Кміть І.Я., Кобилинська Т.В., Копитко Б.І., Лопушанська Г.П., Літовченко В.А., Мартинюк О.В., Мединський І.П., Мельник Т.А., Михайлець В.А., Нєсмєлова О.В., Оліскевич М.О., Пелих В.О., Притула Я.Г., Притула Я.Я., Пукальський І.Д., Процах Н.П., Пукач П.Я., Розора І.В., Самойленко В.Г., Скрипнік І.І., Слободян М.С., Станжицький О.М., Ткаченко В.І.,Токовий Ю.В., Чабанюк Я.М., Черевко І.М., Шарин С.В., Шепельський Д.Г.

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Бокало М.М. (співголова), Пелих В.О. (співголова), Пукач П.Я. (співголова), Ярова О.А. (вчений секретар), Базилевич І.Б., Бокало Т.М., Бугрій О.М., Бугрій Х.О., Венгерський П.С., Власов В.А., Вовк М.І., Головатий Ю.Д., Головенко А.І., Дребот А.Ю., Єлейко Я.І., Жерновий К.Ю., Жерновий Ю.В., Кирилич В.М., Кобилинська Т.В., Лисецький Т.Б., Лопушанська Г.П., Нос А.М., Симотюк М.М., Химич О.А., Холявка О.Т., Шувар Р.Я., Яценяк Д.В.

© ЛНУ ім. І. Франка, 2026

ЗМІСТ

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ 13

Бігун Я., Петришин Р., Скутар І. Багаточастотні системи із запізненням аргументу та різною асимптотикою амплітудних і фазових змінних 14

Бокало М.М., Буряченко К.О., Нєсмєлова О.В., Притула Я.Г., Скрипнік І.І. Життєвий шлях і наукова спадщина Ярослава Борисовича Лопатинського 15

Бугрій О.М., Кміть І.Я., Притула Я.Г., Процах Н.П., Пукач П.Я. Життєвий шлях і наукова спадщина Сергія Павловича Лавренюка 17

Грабчак Г.Є. Обґрунтування асимптотик спектра однієї сингулярно збуреної спектральної задачі на зірковому графі 19

Ільків В., Страп Н., Волянська І. Умови коректної розв'язності триточкової задачі для рівняння з нерівновіддаленими вузлами інтерполяції в уточненій шкалі просторів екпоненціального типу 20

Лека М.О. Об'ємний потенціал спряженої задачі Коші для рівнянь з дисипативною параболічністю 21

Літовченко В.А. Про задачу Діріхле для рівняння ізотропної супердифузії 22

Пукальський І.Д., Яшан Б.О. Нелокальна загальна крайова задача з інтегральною умовою для нерівномірно 2b-параболічних рівнянь зі степеневими особливостями 23

Репетило С., Симотюк М. Задача типу Діріхле-Неймана для гіперболічного рівняння четвертого порядку 25

Симотюк М.М. Зовнішня алгебра та оцінки визначників задач з рівновіддаленими кратними вузлами 26
Ферук В.А. Задача кінцевого значення для багаточленного диференціального рівняння дробового порядку 27
Andrusyak I.V., Brodyak O.Ya., Huzyk N.M. Coefficient inverse problems for degenerate parabolic equation 28
Atlasiuk O., Mikhailets V. On limit theorems for differential systems with multipoint boundary conditions in Sobolev spaces 29
Bak S.M., Kovtoniuk H.M. On solitary traveling waves in discrete Klein-Gordon-type equations 30
Balinsky A.A., Prykarpatsky A.K., Dilnyi V.M. On the weakly semi-Fredholm structure of a class of singular Beurling-Ahlfors type operator equations 31
Barabash G.M., Yeremenko Yu.P. Variational inequality without initial conditions for a Navier-Stokes type system . 32
Bilozerova M.O. Dynamical systems based on stochastic differential equations with interaction 33
Bokalo M., Sus O. Nonlinear parabolic equations with Volterra-type operators on metric graphs 34
Bokalo M., Vysochan A. A problem without initial conditions for differential-operator equations in Fourier series spaces 35
Borachok I., Chapko R. Green fundamental sequences for evolution problems in canonical unbounded domains with cavities 36
Boyko P.I., Lopushanska H.P., Pukach P.Ya. Inverse coefficient problem for fractional diffusion equation 37

Buryachenko K.O., Kudrych Yu.S. Pointwise estimates for anisotropic double-phase elliptic equations with absorption lower terms 38
Chapko R, Palianytsia O. A boundary-domain Nyström method for a Fredholm pide 39
Chepurukhina I., Murach A. About elliptic problems with rough boundary data 40
Dobosevych O.M. Direct and inverse spectral problems for $\mathcal{PT}$-symmetric rank-one perturbations 41
Dorogovtsev A.A., Hlyniana K., Liu S. Ergodic limits of braid winding for measure-valued flows with interaction . 42
Eftekharinasab K., Lastivka I. Application of the global diffeomorphism theorem to nonlinear Hammerstein equations on the d-torus 43
Firman T., Kyrylych V. Some problems for countable hyperbolic systems 44
Golovaty Yu., Hryniv R. Constructive spectral filter synthesis for layered impedance systems 46
Klius I. A two-point problem in systems of partial differential equations 47
Kmit I. Forced frequency locking for dissipative hyperbolic PDEs 48
Kuchynskyi K. Dispersion of interacting stochastic flows . 49
Kustarova K.M. Deterministic and Monte-Carlo approximation scheme for stochastic differential equations with interaction 50
Kyrylych V., Mahdach A. 1D linear hyperbolic systems and their controllability properties 51
Lavryk S. On using Laplace transform and MFS for 3d parabolic problems with piecewise-defined boundary data 53

Mel'nyk T.A. Dimension reduction and asymptotic approximation of reactive transport in fractured porous media 54
Mikhailets V., Molyboga V. On uniqueness problem for accretive Scrödinger operators with complex singular coefficients 55
Pasichnyk H.S. On the dissipative ultraparabolic equation with coefficients independent of degeneracy variables 56
Pivovarchik V.M., Supranovych A.O. Sturm-Liouville problem on a star graph with Robin boundary conditions .. 57
Vovchanskyi M.B. Operator splitting for coalescing one-dimensional stochastic flows 58
Vus A.Ya. Liouville-integrability of closed chains on the line 59
Yanchynskyi Yu. MFS with Green function kernels for linear free-surface problems in tanks and channels 60
Yatseniak D.V., Buhrii O.M. Spectral problem on connected graphs and its application 61
2. АНАЛІЗ ДАНИХ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ 62
Базилевич І.Б., Гавриляк О.А. Статистичний аналіз у лінгвістиці 63
Венгерський П.С., Лесик В.Ю. Виявлення шкідливих url-адрес методами штучного інтелекту: огляд підходів та експериментальне порівняння класичних моделей 64
Гутік О., Кузбит Ю. Про ключовий багатодіагональний шифр 65
Ільницький І., Пукач П. Математичне моделювання та стрес-тестування механізмів зіставлення ознак на основі уваги за умов прогресуючої деградації зображень 66
Лисецький Т.Б. Суміші близьких до критичних процесів Гальтона-Ватсона 67

Нос А.М., Єлейко Я.І. Керовані марковські процеси з обривом у задачі максимізації випуску продукції до моменту банкрутства 68
Патинко А., Шувар Р. Модель колективного стану для виявлення аномалій у залежних потоках даних 69
Прокопишин І.А. Моделювання та оцінювання ризику для систем захисту інформації 71
Слободян М., Маркевич Л., Смаль О. Пружно-пластична задача розтягу круглої пластини з поверхневою тріщиною та пластичними зонами з використанням умови пластичності Треска-Сен-Венана 72
Яджак М. Опрацювання даних під час дослідження складних ієрархічно-мережевих систем 73
Ярова О.А. Випадкові еволюції на регенеруючому процесі з нелінійною апроксимацією часу 74
Ясінський А, Козицький В., Флюд В. Оптимальне керування осесиметричним термопружним прогином круглої пластини, яка нагрівається внутрішніми джерелами тепла 75
Azarov M.I. Forecasting of wheat prices using weather, market and sentiment data 77
Bedzir O., Rozora I., Pashko A. Data analysis for probabilistic forecasting of network delay exceedances 78
Bokalo T.M. A score-based ranking of racing drivers from qualifying and race results 79
Buhrii Kh.O. Bands of nearly complete transmission or suppression in a waveguide with resonators 80
Buhrii N.V., Buhrii O.M., Holovenko A.I., Kholiavka O.T., Kobylynska T.V. Bayesian analysis of solution of some heat conduction problem 81

Bulka I.I., Pavlyshenko B.M. Combining preference optimization with supervised tuning for Ukrainian translation 82
Chabanyuk Ya.M., Khimka U.T. Convergence of a stochastic approximation procedure in asymptotic small diffusion schema with semi-Markov switching 83
Chernukha O.Y., Chuchvara A.Y., Bilushchak Yu.I. Approximation of experimental data at body boundaries in a diffusion-convection-sorption model with magnesium neutralization 84
Chypurko R., Chabanyuk Ya. Modelling of epidemic development with semi-Markov switchings 85
Demkiv L., Fostyak M. Developing an interpretable classification model using sparse belief rule bases and machine learning 86
Drebot A. Bayesian inference of the aggregated kernel of transitions in a hidden mixture of Markov chains 87
Fesiuk A.V., Furgala Yu.M. Geometric accuracy and spatial-structural quality in local feature matching 88
Hladun V. Stability sets for perturbations of continued fractions with complex partial numerators and unit partial denominators 89
Hrytsyshyn O., Trushevskyy V., Terletskyy O. Numerical dissipation and effective viscosity in particle-based fluid simulations 90
Kerod T.I. A graph model of vulnerable software dependencies in microservice systems 91
Knopov D., Shvai N. Equivalence testing and run-count design for stochastic machine-learning experiments .. 92
Kobernyk M., Chabanyuk Ya., Horlatch V. Fast-slow aggregation of contextual football states 93

Kopytko B., Shevchuk R. On a one-dimensional model of diffusion in a heterogeneous medium with moving membranes 95
Kozynets A.Yu., Demkiv L.S. Architecture-dependent robustness of neural networks to hybrid compression 96
Kulyk P.R., Shuvar R.Ya. Adaptive data augmentation for fine-grained object recognition under limited labeled data 97
Marchuk Yu. Maintaining behavioral consistency between specifications and AI-generated software changes 98
Melnyk I.O. Semiring operators for dependency analysis in directed networks 100
Mysiuk R.V. Analysis of the efficiency of distributed machine learning on edge devices 101
Parubochyi V. Investigation of approaches to the comprehensive evaluation of ambient lighting normalisation methods for images acquired under complex lighting conditions 102
Pavlyshenko B.M., Drozdov I.V. Analysis of zero-shot named entity recognition on social network posts 103
Rohatskyi I. Drone agent modeling with local decision-making function 104
Romanchuk L.O. Non-identifiability of the market potential in the Bass diffusion model 105
Shakhovska Kh., Pukach P., Vovk M. Combining statistical indicators to quantify changes during the adaptive response to drift 106
Stasiuk M.I. Evaluating cross-lingual semantic consistency in Ukrainian-English text embeddings 107
Tokovyy Yu.V. Governing equations of the elasticity problems in multilayer media 108

Tsudzenko I., Tsudzenko Yu. Bayesian risk assessment in computer vision-based UAV systems 109
Zhernovyi Yu.V., Zhernovyi K.Y. Reliability of series repairable systems under unlimited redundancy 111

НАПРЯМ 1

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

БАГАТОЧАСТОТНІ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ ТА РІЗНОЮ АСИМПТОТИКОЮ АМПЛІТУДНИХ І ФАЗОВИХ ЗМІННИХ

Ярослав Бігун, Роман Петришин, Ігор Скутар
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: y.bihun@chnu.edu.ua, r.petryshyn@chnu.edu.ua

Для системи диференціальних рівнянь із запізненням аргументу, заданим лінійно перетвореними аргументами, та різною асимптотикою амплітудних $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ і фазових змінних $\varphi \in \mathbb{R}^m$ методом усереднення за фазовими змінними [1] досліджено існування і єдиність розв'язку початкової задачі [2]. Система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^{\kappa}} + \varepsilon^{\kappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \qquad (1)$$

де $\tau \geq 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $a_\Lambda(\tau) = \Big(a(\lambda_1\tau), \ldots, a(\lambda_p\tau)\Big)$, $\varphi_\Theta(\tau) = \Big(\varphi(\theta_1\tau), \ldots, \varphi(\theta_q\tau)\Big)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0, 1]$, $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$, $\kappa > 0$.

Обґрунтовано метод усереднення й для досить малого $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$ одержано оцінку похибки методу:

$$\varepsilon^{\kappa_2}\|a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau)\| + \varepsilon^{\kappa_1}\|\varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{\alpha+\kappa_1+\kappa_2}, \qquad (2)$$

де $\alpha = \kappa/(mq)$, $a|_{\tau=0} = \overline{a}|_{\tau=0}$, $\varphi|_{\tau=0} = \overline{\varphi}|_{\tau=0}$, $c > 0$.

Одержаний результат застосовано для моделі типу Курамото із різною асимптотикою кластерів біологічної нейронної мережі.

1. Samoilenko A., Petryshyn R. *Multifrequency oscillations of nonlinear systems*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. Bihun Ya., Petryshyn R., Skutar I. *Averaging in a generalised multifrequency system with a delay. Analytical and approximate methods for complex dynamical systems*. Cham: Springer, 2025. P. 281–294.

ЖИТТЄВИЙ ШЛЯХ І НАУКОВА СПАДЩИНА ЯРОСЛАВА БОРИСОВИЧА ЛОПАТИНСЬКОГО

Микола М. Бокало [1] **, Катерина О. Буряченко** [2,3] **,**
Ольга В. Нєсмєлова [4] **, Ярослав Г. Притула** [1] **,**
Ігор І. Скрипнік [4]

Львівський національний університет імені Івана Франка
Львів, Україна
[2] *Донецький національний університет імені Василя Стуса*
Вінниця, Україна
[3] *Інститут прикладного аналізу і стохастики К. Веєрштрасса*
Берлін, Німеччина
[4] *Інститут прикладної математики і механіки*
Слов'янськ, Україна
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, k.buriachenko@donnu.edu.ua,
star-o@ukr.net, yaroslav.prytula@lnu.edu.ua,
ihor.skrypnik@gmail.com

Ярослав Борисович Лопатинський народився 9 листопада 1906 року в Тбілісі (Грузія). Його дитинство і юність пройшли в сім'ї діда Лева Григоровича Лопатинського, який народився в місті Долина (нині Івано-Франківської області) в сім'ї греко-католицького священика і був на той час професором Бакинського університету, маючи ступінь доктора кавказького мовознавства.

У 1922 році Я.Б. Лопатинський закінчив Бакинський економічний технікум, а у 1926 році – фізико-математичний факультет Азербайджанського університету. З 1926 року по 1946 рік він науковий співробітник і викладач Азербайджанського університету та Азербайджанського індустріального інституту. Харківський університет у 1938 році надав йому ступінь кандидата фізико-математичних наук без захисту дисертації. У 1946 році захистив докторську дисертацію "Лінійні диференціальні оператори". В цьому ж році разом з сім'єю переїхав до Львова. У Львівському

університеті завідував кафедрами алгебри (1946-1948), алгебри і геометрії (1948-1953), диференціальних рівнянь (1953-1963). У 1947 році отримав звання професора.

Основні наукові роботи Я.Б. Лопатинського належать до теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також застосувань алгебраїчних та топологічних методів в теорії диференціальних рівнянь. У львівський період отримав фундаментальні результати в теорії еліптичних систем. Ці результати значною мірою визначили подальший розвиток цієї галузі математики і принесли йому світову славу.

У Львові Я. Лопатинський організував семінар, який згуртував велике число наукової молоді і зрілих математиків і став центром математичного життя Львова.

У 1965 році Я.Б. Лопатинський переїхав у Донецьк. З 1966 року – завідувач відділом рівнянь у частинних похідних Інституту прикладної математики і механіки АН УРСР (нині НАН України), завідувач кафедрою диференціальних рівнянь у Донецькому університеті. Опублікував низку робіт присвячених дослідженню загальних крайових задач для диференціальних рівнянь з допомогою топологічних методів, питанням розв'язності задачі Коші для операторно-диференціальних рівнянь в банахових просторах, застосуванню теорії Морса до варіаційних еліптичних рівнянь. Автор багатьох наукових статей, підручників та монографій.

Я.Б. Лопатинський разом зі своїми учнями створив в Україні наукові школи з диференціальних рівнянь у Львові (О. Мельник, В. Лянце, В. Скоробогатько), Донецьку (І. Скрипник), з алгебри у Львові (П. Казимірський), Ужгороді (С. Берман).

Від 1965 року – дійсний член Академії Наук Української РСР, а в 1978 році удостоєний Державної премії УРСР.

Помер Я.Б. Лопатинський в Донецьку 10 березня 1981 року.

ЖИТТЄВИЙ ШЛЯХ І НАУКОВА СПАДЩИНА СЕРГІЯ ПАВЛОВИЧА ЛАВРЕНЮКА

Олег М. Бугрій [1] **, Ірина Я. Кміть** [2,3] **,**
Ярослав Г. Притула [1] **, Наталія П. Процах** [4] **,**
Петро Я. Пукач [4]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України Львів, Україна*

[3] *Берлінський університет імені Гумбольдта Берлін, Німеччина*

[4] *Національний університет "Львівська політехніка" Львів, Україна*

e-mail: oleh.buhrii@lnu.edu.ua, kmit@math.hu-berlin.de, yaroslav.prytula@lnu.edu.ua, nataliia.p.protsakh@lpnu.ua, petro.y.pukach@lpnu.ua

4 листопада 2026 року минуло 80 років з Дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, заслуженого професора Львівського національного університету імені Івана Франка Сергія Павловича Лавренюка (1946-2008) – видатного математика, науковця, педагога, автора понад 110 наукових та методичних праць, наукового керівника тринадцяти захищених дисертацій здобувачів з України та Польщі.

Наукові ідеї С.П. Лавренюка спрямовані на розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Його праці присвячено дослідженню варіаційних нерівностей, крайових задач для нелінійних рівнянь і задач економетрії.

У доповіді, зокрема, буде висвітлено основні напрямки наукової діяльності С.П. Лавренюка: стійкість за Ляпуновим систем рівнянь; однозначна розв'язність мішаних задач для вироджених еволюційних рівнянь високого порядку, нелінійних параболічних

рівнянь, нелінійних гіперболічних рівнянь зі збуреннями та гіперболічних рівнянь високого порядку, нелінійних ультрапараболічних та псевдопараболічних рівнянь, а також параболічних та ультрапараболічних варіаційних нерівностей.

ОБҐРУНТУВАННЯ АСИМПТОТИК СПЕКТРА ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ НА ЗІРКОВОМУ ГРАФІ

Геннадій Є. Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: hennadii.hrabchak@lnu.edu.ua

Робота присвячена аналізу сингулярно збуреної спектральної задачі на зірковому графі Γ. Ця задача моделює власні коливання в'язки струн із δ'-подібним збуренням густини в околі точки їхнього з'єднання. Функція густини має вигляд $\rho_\varepsilon(x) = \rho(x) + \varepsilon^{-2} q_\varepsilon(x)$, де збурення q_ε зосереджене в ε-околі центра O (точки з'єднання), а $\varepsilon > 0$ – малий параметр, що характеризує лінійний розмір області локалізації збурення.

В [1] детально вивчено спектральні властивості відповідної граничної задачі. З'ясовано, що загалом вона може бути несамоспряженою: окрім власних функцій можуть бути приєднані. Було з'ясовано структури спектра і кореневих підпросторів, побудовано системи власних і приєднаних функцій, а також досліджено їхню геометричну та алгебраїчну кратності. Проте питання строгого математичного обґрунтування побудованих формальних асимптотик залишилося нез'ясованим.

У цій доповіді запропоновано обґрунтування раніше розроблених формальних асимптотик власних елементів збуреної задачі. Запропонований підхід базується на доведенні рівномірної резольвентної збіжності деякої сім'ї операторів, асоційованих із збуреною задачею, до оператора граничної задачі.

1. Головатий Ю., Грабчак Г. *Про задачу Штурма-Ліувілля на зіркових графах з "важкими" вузлами.* Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 2010; 72: 63-78.

УМОВИ КОРЕКТНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ТРИТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З НЕРІВНОВІДДАЛЕНИМИ ВУЗЛАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ В УТОЧНЕНІЙ ШКАЛІ ПРОСТОРІВ ЕКПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Володимир Ільків, Наталія Страп, Ірина Волянська

Національний університет "Львівська політехніка"

Львів, Україна

e-mail: ilkivvv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua

В області $\mathcal{D} = [0;T] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω – одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ розглянуто задачу з триточковими умовами

$$Lu = \partial_t^3 u + \sum_{j=0}^{1} a_{2j}\partial_x^j \partial_t^2 u + \sum_{j=0}^{2} a_{1j}\partial_x^j \partial_t u + \sum_{j=0}^{3} a_{0j}\partial_x^j u = 0,$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(\tau,x) = \varphi_2(x), \quad u(T,x) = \varphi_3(x),$$

де $\vec{a} \in \mathbb{C}^9$ – сталий вектор, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ – задані функції, $u = u(t,x)$ – шукана функція, число τ інтервалу $(0,T)$.

У роботі отримано критерії однозначної розв'язності задачі в уточненій шкалі просторів експоненційного типу, де поряд з числовим параметром $q \in \mathbb{R}$, який задає основну гладкість, діє функціональний параметр – повільно змінна функція ψ, яка визначає допоміжну гладкість. Для дійсного числа α і функції $\beta\colon [0;T] \to \mathbb{R}$ введено шкали просторів $\{\mathbf{E}^q_{\alpha,\psi}(\Omega)\}_{q,\psi}$ і $\{\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\psi}(\mathcal{D})\}_{q,\psi}$, де $\mathbf{E}^q_{\alpha,\psi}(\Omega)$ – гільбертів простір періодичних функцій $\theta(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \theta_k e^{ikx}$ з нормою $\|\theta\|^2_{\mathbf{E}^q_{\alpha,\psi}(\Omega)} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q}\psi^2(k)e^{2\tilde{k}\alpha}|\theta_k|^2$, $\tilde{k} = \sqrt{1+k^2}$, а $\mathbf{E}^{3,q}_{\beta,\psi}(\mathcal{D})$ – банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що похідні $\partial_t^l u(t,\cdot)$, де $l = 0,1,2,3$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{E}^{q-l}_{\beta(t),\psi}(\Omega)$, відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах.

Особливістю цієї роботи є також і те, що під час дослідження задачі з однією просторовою змінною показано відсутність проблеми малих знаменників, що вказує на її коректність.

ОБ'ЄМНИЙ ПОТЕНЦІАЛ СПРЯЖЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ДИСИПАТИВНОЮ ПАРАБОЛІЧНІСТЮ

Максим О. Лека

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

e-mail: leka.maksym@chnu.edu.ua

Розглянемо рівняння

$$\partial_t v(t;\xi) = -\{A_0^*(t;i\partial_\xi) + A_1^*(t,\xi;i\partial_\xi)\}v(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{[0;\tau)}, \quad (1)$$

в якому v – невідома функція, $\tau \in (0;T]$, а

$$A_0^*(t;i\partial_\xi)\cdot = \sum_{|k|\le p} \overline{a_{0,k}(t)} i^{|k|}\partial_\xi^k \cdot,\ A_1^*(t,\xi;i\partial_\xi)\cdot = \sum_{|k|\le p_1} \partial_\xi^k (i^{|k|}\overline{a_{1,k}(t;\xi)}\cdot).$$

Вважатимемо, що диференціальний вираз $A_0^*(t;i\partial_\xi)$ на $\Pi_{[0;\tau]}$ є обернено $\{p;h\}$-параболічним з родом $\mu < 0$, а порядок p_1 виразу A_1^* менший за h.

Функція Гріна задачі Коші для (1) має структуру

$$Z^*(t,\xi;\tau,x) = G^*(t,\xi;\tau,x) + W^*(t,\xi;\tau,x), \quad (2)$$

в якій G^* – параметрикс, а W^* – об'ємний потенціал цієї задачі.

Правильне таке твердження.

Теорема. Нехай на множині $\Pi_{[0;\tau]}$ коефіцієнти рівняння (1) нескінченно диференційовні за змінною ξ, неперервні за t рівномірно стосовно ξ, обмежені разом з усіма своїми похідними комплекснозначні функції. Тоді функція $W^*(t,x;\tau,\xi)$ диференційовна за t, нескінченно диференційовна за змінними x,ξ причому

$$|\partial_\xi^r \partial_x^q W^*(t,\xi;\tau,x)| \le c(\tau-t)^{1-\frac{n+p_1+|r+q|}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|^h}{\tau-t}\right)^{\frac{1}{h-\mu}}}.$$

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗОТРОПНОЇ СУПЕРДИФУЗІЇ

Владислав А. Літовченко

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Чернівці, Україна

e-mail: v.litovchenko@chnu.edu.ua

Розглянемо таку крайову задачу Діріхле:

$$\partial_t u(t;x) + a(-\Delta)_x^{\alpha/2} u(t;x) = 0, \quad t \in (0;T],\, x \in (0;l); \tag{1}$$

$$u(t;x)|_{t=0} = 0, \quad x \in (0;l); \tag{2}$$

$$u(t;x)|_{x\in\{0;l\}} = \nu(t), \quad t \in (0;T] \tag{3}$$

(тут $a > 0$, $l > 0$, u – невідома функція, а $(-\Delta)_x^{\alpha/2}$ – дробовий Лапласіан порядку $\alpha \in (0;2)$, що діє за змінною x).

Рівняння (1) знайшло широке застосування в багатьох галузях науки й техніки. Зокрема воно описує поширення резонансних фотонів у плазмі та дифузійні процеси в фрактальних середовищах, через що це рівняння отримало назву "рівняння ізотропної супердифузії" [1].

Правильне таке твердження.

Теорема. Нехай гранична функція $\nu(t)$ обмежена на $[0;T]$, неперервно диференційовна на $(0;T]$ така, що

$$|\nu'(t)| \le ct^{-\gamma}, \quad \gamma < 1,\, t \in (0;T].$$

Тоді крайова задача Діріхле (1)-(3) має єдиний регулярний розв'язок $u(t;x)$ на множині $(0;T] \times (0;l)$.

1. Літовченко В.А. *Перша крайова задача на півосі для ізотропного рівняння супердифузії порядку більше одиниці.* Укр. мат. журн. 2026; 78 (5-6): 419-442.

НЕЛОКАЛЬНА ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО 2B-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Іван Д. Пукальський, Богдан О. Яшан

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*

e-mail: i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

Нехай t_0, t_1, T_1, T – фіксовані числа, $0 \le t_1 < T_1 \le T$, $t_0 \in (0,T)$, Ω – деяка обмежена область $dim\Omega \le n-1$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $dimD = n$, $\Omega \subset D$, $Q = [0,T] \times D$, $Q_0 = \{(t,x) \mid t \in [0,T), x \in \Omega\} \cup \{(t,x), \mid t = t_0, x \in D\}$.

Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_0$ рівняння

$$(Lu)(t,x) = \Big[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\Big]u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

умову за змінною t

$$(Bu)(x) \equiv u(0,x) + \int_{t_1}^{T_1} d(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x) \tag{2}$$

а на межі області $\Gamma = [0,T] \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \to z \in \partial D}\Big[\sum_{|k|=r_\lambda} B_k^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^k u + \sum_{|p|\le r_\lambda - 1} B_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u - f_\lambda(t,x)\Big] = 0, \tag{3}$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $\lambda \in \{1, ..., b\}$, $0 \le r_\lambda \le 2b-1$.

Крайова задача (1)-(3) досліджується у просторі $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ [1].

Правильна така теорема.

Теорема 1. Нехай для задачі (1)-(3) виконані умови а)-в) із [1], де $d(\tau,x) \in C^{2b+\alpha}(Q)$, $\int_{t_1}^{T_1} |d(\tau,x)|d\tau \le b < 1$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) із простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і справджується нерівність

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le C\Big(\|f;\gamma;\beta;2b;Q\|_{\alpha} + \Big\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\Big\|_{2b+\alpha} + \\ + \sum_{\lambda=1}^{b} \|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big). \qquad (4)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)-(3).

1. Лусте І.П., Пукальський І.Д. *Загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями.* Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2022; 65 (2): 109-120.

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Софія Репетило [1] **, Михайло Симотюк** [2]

[1] *Національний університет "Львівська політехніка" Львів, Україна*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

e-mail: repetylosofiya@gmail.com, mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Досліджено двоточкову за часом задачу типу Діріхле-Неймана для рівняння четвертого порядку, диференціальний вираз якого є композицією двох хвильових виразів із різними швидкостями. За допомогою методу Фур'є отримано достатні умови коректності задачі у просторах Соболєва, періодичних за просторовою координатою функцій, якщо для характеристичних визначників виконуються степеневі оцінки знизу.

Встановлено оцінку відхилення характеристичного визначника задачі з ненульовим потенціалом від визначника задачі з нульовим потенціалом на підставі асимптотики нормальної (при $t = 0$) фундаментальної матриці відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння з параметром.

Доведено метричні оцінки для характеристичного визначника задачі для майже всіх значень правого вузла інтерполяції. У частковому випадку спеціальної сумірності швидкостей хвильових виразів доведено точнішу нижню оцінку для характеристичного визначника, що зменшує втрату гладкості у теоремі про розв'язність задачі. Проведені дослідження спираються на результати, отримані в [1].

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* Київ: Наук. думка, 2002.

ЗОВНІШНЯ АЛГЕБРА ТА ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКІВ ЗАДАЧ З РІВНОВІДДАЛЕНИМИ КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

Михайло М. Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

e-mail: mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

Нехай $l, n, p \in \mathbb{N}$, $l \le n$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$,

$$A_j(k) = \sum_{|s| \le j} A_{j,s}\, k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}, \quad A_{j,s} \in \mathbb{C},$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1, \quad s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \quad |s| = s_1 + \dots + s_p,$$

$f_1(t,k), \dots, f_n(t,k)$ – така фундаментальна система розв'язків рівняння $y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(k) y^{(j)}(t) = 0$, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j, q = 1, \dots, n$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $r_1, \dots, r_l \in \{1, \dots, n\}$, $r_1 + \dots + r_l = n$, $t_1, \dots, t_l \in [0, T]$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_l)$, $t_j = jh$,

$$\vec{f}_{j,r_q}(t,k) = \mathrm{col}(f_j(t,k), f_j'(t,k), \dots, f_j^{(r_q-1)}(t,k)), \quad q = 1, \dots, l,$$

$$\vec{F}_j(\vec{t}, k) = \mathrm{col}(\vec{f}_{j,r_1}(t_1, k), \dots, \vec{f}_{j,r_l}(t_l, k)), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Delta(k) = \det \|\vec{F}_1(\vec{t}, k), \dots, \vec{F}_n(\vec{t}, k)\|, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{1}$$

Визначники (1) виникають при дослідженні задач з кратними рівновіддаленими вузлами $t_j = jh$, $j = 1, \dots, l$, для рівнянь із частинними похідними в циліндричних областях. За допомогою апарату зовнішньої алгебри, теорем про оцінки виняткових множин гладких функцій встановлено, що для належно вибраних сталих ω, δ, γ оцінка

$$|\Delta(k)| \ge (1 + |k|)^{-\omega} \exp(\delta |k|^{\gamma}), \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|, \tag{2}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $h \in [0, T/l]$ для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$.

ЗАДАЧА КІНЦЕВОГО ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ БАГАТОЧЛЕННОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Віктор А. Ферук
Інститут математики НАН України
Київ, Україна
e-mail: feruk.viktor@gmail.com

Розглядається задача кінцевого значення для багаточленного диференціального рівняння

$$ {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha_\nu} x(t) + \sum_{\nu=1}^{r-1} a_\nu(t)\, {}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha_\nu} x(t) + a_r(t)x(t) = f(t), \quad x(b) = x^*, \ (1) $$

на розв'язки якої накладено додаткові умови

$$ lx(\cdot) = q, \qquad (2) $$

де $1 \geq \alpha_r > \alpha_{r-1} > \ldots > \alpha_1 > 0$, $\alpha_{\bar{\nu}}/\alpha_{\tilde{\nu}} \in \mathbb{Q}$, $\bar{\nu}, \tilde{\nu} \in \{1, 2, \ldots r\}$, ${}^{C}\mathrm{D}_{a+}^{\alpha_\nu}$ – лівосторонні похідні Капуто, $a_\nu(t) \in C[a,b]$, $\nu = \overline{1,r}$, $f(t) \in C[a,b]$, $l = \mathrm{col}\left(l_1, \ l_2, \ \ldots, \ l_p\right) : C[a,b] \to \mathbb{R}^p$ – обмежений лінійний векторний функціонал, $l_i : C[a,b] \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$, $x^* \in \mathbb{R}$, $q = \mathrm{col}\left(q_1, \ q_2, \ \ldots, \ q_p\right) \in \mathbb{R}^p$.

Використовуючи методи теорії нормально розв'язних крайових задач [1] і результати отримані у роботі [2], встановлено критерій розв'язності задачі (1), (2). Аналогічний результат отримано також для випадку правосторонньої похідної Капуто.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Berlin: De Gruyter, 2016.
2. Boichuk O.A., Feruk V.A. *Terminal value problem for the system of fractional differential equations with additional restrictions.* Math. Model. Anal. 2025; 30 (1): 120-141.

COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Ivanna V. Andrusyak, Oksana Ya. Brodyak, Nadiia M. Huzyk

Lviv Polytechnic National University

Lviv, Ukraine

e-mail: ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodiak@lpnu.ua, nadiia.m.huzyk@lpnu.ua

In a rectangle $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ we consider inverse problems of identification of the time-dependent functions $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ in a minor coefficient of the parabolic equation

$$v_t = a(t)t^\beta v_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))v_x + c(x,t)v + f(x,t)$$

with initial condition

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,l],$$

boundary conditions

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]$$

and integral overdetermination conditions

$$\int_0^l v(x,t)\,dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T],$$

$$\int_0^l xv(x,t)\,dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T].$$

It is assumed that $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, and that the degeneracy of the equation is caused by the power function t^β. The existence and uniqueness conditions for the solution of this inverse problem are established for both weak and strong degeneracy.

ON LIMIT THEOREMS FOR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS IN SOBOLEV SPACES

Olena Atlasiuk [1,2] **, Vladimir Mikhailets** [1,3]

[1] *University of Helsinki, Helsinki, Finland*

[2] *Institute of Mathematics of the NASU, Kyiv, Ukraine*

[3] *King's College London, London, UK*

e-mail: hatlasiuk@gmail.com, vladimir.mikhailets@gmail.com

The most general class of multipoint inhomogeneous boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations of arbitrary order $r \geq 1$ is investigated, whose solutions belong to a given Sobolev space W_p^{n+r}, where $n \geq 0$ and $1 \leq p \leq \infty$. The boundary conditions in these problems contain Caputo derivatives of fractional or integer orders, which may exceed the order of the equations of the differential system. Constructive sufficient conditions are established under which the solutions of these problems are continuous in the Sobolev space W_p^{n+r} with respect to a parameter from an abstract metric space. The convergence rate of the solutions was found, namely, it was established that the error is proportional to the discrepancy, which can be interpreted as the Ulam-Hyers stability of solutions of the boundary-value problem with parameter as $\mu \to \mu_0$ [1].

1. Atlasiuk O., Mikhailets V. *Limit theorems for differential systems with multipoint boundary conditions in Sobolev spaces.* Complex Anal. Oper. Theory. 2026; 20: Article 173.

ON SOLITARY TRAVELING WAVES IN DISCRETE KLEIN-GORDON-TYPE EQUATIONS

Serhii M. Bak, Halyna M. Kovtoniuk
Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University
Vinnytsia, Ukraine
e-mail: sergiy.bak@gmail.com, galyna.kovtonyuk@gmail.com

We consider the discrete Klein-Gordon-type equations that describe an infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators. Let $q_n(t)$ be a generalized coordinate of the n-th oscillator at time t. We assume that each oscillator interacts linearly with two nearest neighbors. Then the equations of motion of the system considered are of the form

$$\ddot{q}_n(t) - a(\Delta_d q)_n(t) - bq_n(t) + f(q_n(t)) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

where $a \neq 0$, $b > 0$, Δ_d is the 1-dimensional discrete Laplacian, i.e.,

$$(\Delta_d q)_n(t) = q_{n+1}(t) + q_{n-1}(t) - 2q_n(t),$$

$f(r) = V'(r) \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and $V(r)$ is the on-site potential.

The main results concern the existence and construction of solitary traveling wave solutions in such equations with power nonlinearities. The proof is based on a constrained minimization approach combined with the Concentration Compactness Principle ([1]).

1. Lions P.L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part I, II.* Ann. Inst. H. Poincare. Anal. Non Lineaire. 1984; 1 (2): 109-145 (223-283).

ON THE WEAKLY SEMI-FREDHOLM STRUCTURE OF A CLASS OF SINGULAR BEURLING-AHLFORS TYPE OPERATOR EQUATIONS

Alexander A. Balinsky [1] , **Anatolij K. Prykarpatsky** [2,3] , **Volodymyr M. Dilnyi** [4]

[1] *Cardiff University, Cardiff, United Kingdom*

[2] *Ivan Franko Pedagogical University, Drohobych, Ukraine*

[3] *Kraków University of Technology, Kraków, Poland*

[4] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

e-mail: balinskya@cardiff.ac.uk, pryk.anat@cybergal.com, volodymyr.m.dilnyi@lpnu.ua

Singular operator equations on complex domains are widely used in many investigations of important problems of modern mechanics, radiophysics, solid state physics and other applied sciences. Their theory is closely related with partial differential equations, geometry of complex-analytic and quasi-conformal mappings. In our work we studied the solution space of a linear singular Beurling-Ahlforse type operator equation $T(a(z)f(z)) + b(z)f(z) = 0$ for $f \in L_q(\mathbb{C}, d\sigma)$, $q > 1$, specified by coefficients $a, b \in L_r(\mathbb{C}, d\sigma)$ on the complex plane $\mathbb{C}$, and the operator action $Tf(z) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)-f(\xi)}{(z-\xi)^2} d\sigma(\xi, \bar{\xi})$, $f \in L_p(\mathbb{C}, d\sigma)$, where $1/r + 1/q = 1/p$, $q > p > 1$. Based on the classical Coifman-Rochberg-Weiss commutator [1] and Uchiyama [2] inverse transforms together with the F. Riesz [3] local compactness theorem, we stated conditions under which the singular operator equation under regard possesses the weakly semi-Fredholm structure.

1. Coifman R.R., Rochberg R., Weiss G. *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables.* Annals of Math. 1976; 103 (3): 611-635.
2. Uchiyama A. *On the compactness of operators of Hankel type.* Tôhoku Math. J. 1978; 30: 163-171.
3. Lax P.D. *Functional analysis.* Wiley-Interscience, 2002.

VARIATIONAL INEQUALITY WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR A NAVIER-STOKES TYPE SYSTEM

Galyna M. Barabash, Yulian P. Yeremenko
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: galynabarabash71@gmail.com, julian_lviv@yahoo.com

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain such that $\partial\Omega \subset C^1$, let K be a closed convex set in a space V that contains the zero element.

We consider the problem of finding a function u satisfying the inclusion $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, V) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H)$, $u \in K$ for almost all $t \in \mathbb{R}$, as well as the inequality

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u \right) + \sum_{i=1}^{2} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \left(B_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{2} \left(C_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}, v-u \right) +$$

$$+ (G(x,t)u, v-u) + \sum_{i=1}^{2} u_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, v-u \right) - (F_0(x,t), v-u) -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{2} \left(F_i(x,t), \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] dxdt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |v(x,t_2) - u(x,t_2)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |v(x,t_1) - u(x,t_1)|^2 \, dx$$

for an arbitrary function $v \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, V)$, $v_t \in L^q_{loc}(\mathbb{R}, V^*)$, $v \in K$ for almost all $t \in \mathbb{R}$ and for arbitrary $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$.

Conditions for the existence of a solution have been obtained that do not depend on the growth as $t \to -\infty$.

Conditions have been established under which all solutions to the inequality tend to zero as $t \to +\infty$.

DYNAMICAL SYSTEMS BASED ON STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERACTION

Maria O. Bilozerova [1,2]

[1] *Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine*
Kyiv, Ukraine
[2] *Odesa I.I. Mechnikov National University*
Odesa, Ukraine
e-mail: marbel@ukr.net

Let M be a compact smooth connected d-dimensional Riemannian manifold without boundary or $M = \mathbb{R}^d$, $(V_0, ..., V_n)$ be mappings such that $V_i : M \times P(M) \to TM$ for all $i = 0, ..., n$, that satisfy all conditions from [1]. We consider equations of the following form

$$\begin{cases} dx_\mu(u,t) = \int\limits_0^t V_0(u, \mu_t)dt + \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_0^t V_i(u, \mu_t)dB_t^i, \\ x_\mu(u,0) = u, \quad \mu_t = \mu_0 \circ x_\mu(\cdot, t)^{-1}. \end{cases} \tag{1}$$

We call depending from measure random dynamical system the pair of mappings (θ, φ) if $\varphi : R \times \Omega \times \mathcal{P}(M) \times M \to M \times \mathcal{P}(M)$ is measurable, for every $\mu \in \mathcal{P}(M)$ a pair $(\varphi(\cdot, \cdot, \mu, \cdot)), \theta)$ is random dynamical system and

$$\varphi(t + s, \omega, \mu, \cdot) = \varphi\left(t, \theta_s\omega, \mu \circ \varphi(s, \omega, \mu, \cdot)^{-1}, \cdot\right) \circ \varphi(s, \omega, \mu, \cdot)$$

for all $\omega \in \Omega, t \in R$, $\mu \in \mathcal{P}(M)$.

Theorem 1. There exist depending from measure random dynamical system (θ, φ) such that $x_\mu(u,t) = \varphi(t, \omega, u)$ is a solution to (1).

1. Dorogovtsev A., Weiss A. *Krylov-Veretennikov decomposition for measure-valued processes induced by SDEs with interaction on Riemannian manifolds.* J. Theor. Prob. 2026; 39 (2): Article 38.

NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH VOLTERRA-TYPE OPERATORS ON METRIC GRAPHS

Mykola Bokalo [1] **, Olha Sus** [2]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[2] *Tufts University, Medford, MA, USA*
e-mail: [1] mm.bokalo@gmail.com, [2] olha.sus@tufts.edu

Let $\mathcal{G} = (\{P_j\}_{j=1}^M, \{\Omega_i\}_{i=1}^N)$ be a simple connected directed metric graph, where each edge Ω_i has length ℓ_i and is identified with $[0, \ell_i]$. Let $T > 0$, $p, q \geq 2$, $Q_i := (0, \ell_i) \times (0, T]$. We consider the IBVP problem

$$u_t^i - \widehat{a}^i \big(|u_x^i|^{p-2} u_x^i\big)_x + \widehat{b}^i(x,t)|u^i|^{q-2}u^i + \int_0^t \widehat{c}^i(x,t,s,u^i(x,s))\, ds = f^i(x,t),$$

$(x,t) \in Q_i$, $i = \overline{1,N}$, with Kirchhoff-Neumann conditions at the vertices P_j, $j = \overline{1,M}$, and the initial condition $u^i(x,0) = \overset{\circ}{u}{}^i(x)$, $x \in (0, \ell_i)$. Here $\widehat{a}^i > 0$ are constants, $\widehat{b}^i \in L^\infty(Q_i)$, $\widehat{b}^i \geq b_0 > 0$, $\widehat{c}^i$ is a Carathéodory function, Lipschitz in the last argument, $\widehat{c}^i(\cdot,\cdot,\cdot,0) = 0$, $f^i \in L^{q'}(Q_i)$, $q' = q/(q-1)$, $\overset{\circ}{u}{}^i \in L^2(0,\ell_i)$.

For weak solutions $\vec{u} = (u^1, \ldots, u^N)$ we prove: 1) uniqueness; 2) the a priori estimate

$$\max_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t)\|_{\vec{L}^2}^2 + \int_0^T \Big[\|\vec{u}_x(t)\|_{\vec{L}^p}^p + \|\vec{u}(t)\|_{\vec{L}^q}^q\Big]\, dt \leq C_1\Big(\|\overset{\circ}{\vec{u}}\|_{\vec{L}^2}^2 + \int_0^T \|\vec{f}(t)\|_{\vec{L}^{q'}}^{q'}\, dt\Big),$$

3) existence, by the Faedo-Galerkin method with a monotonicity argument; 4) continuous dependence on $\vec{f}$ and $\overset{\circ}{\vec{u}}$. To the best of our knowledge, this is the first well-posedness result for nonlinear parabolic equations with Volterra-type operators on metric graphs.

A PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS IN FOURIER SERIES SPACES

Mykola Bokalo, Anastasia Vysochan
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: mm.bokalo@gmail.com, anastasia.vysochan@lnu.edu.ua

In a real separable Hilbert space H, consider the problem [1]:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in S, \qquad \sup_{t\in S} \|u(t)\|_H < +\infty, \qquad (1)$$

where $A\colon D(A) \subset H \to H$ is a linear closed operator, $S = (-\infty, T]$, $T \in \mathbb{R}$.

Theorem 1. Let A be a self-adjoint non-negative operator with a compact resolvent, such that $\lambda_1 > 0$. If $f \in C_b(S;H) \cap C(S; D(A^{1/2}))$ and $\int_S \|A^{1/2} f(s)\|^2\, ds < \infty$, then problem (1) has a unique strong solution of the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_k (t-s)} (f(s), w_k)_H \, ds \Big] w_k, \quad t \in S,$$

where $Aw_k = \lambda_k w_k$, $k \in \mathbb{N}$, and $\{w_k\}$ is an orthonormal basis in H. An a priori estimate has been obtained for the solution.

Theorem 2. Let $f, \{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfy the conditions of Theorem 1, with $f_m \to f$ in $C_b(S;H)$ and $A^{1/2} f_m \to A^{1/2} f$ in $L^2(S;H)$ as $m \to \infty$. Then the sequence $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ of strong solutions to the corresponding problems converges in $C_b^1(S;H) \cap C_b(S; D(A))$ to the strong solution u to problem (1), i.e., the strong solution to problem (1) depends continuously on the right-hand side of the equation.

1. Bokalo M., Lorenzi A. *Linear evolution first-order problems without initial conditions*. Milan J. Math. 2009; 77: 437-494.

GREEN FUNDAMENTAL SEQUENCES FOR EVOLUTION PROBLEMS IN CANONICAL UNBOUNDED DOMAINS WITH CAVITIES

Ihor Borachok, Roman Chapko

[1] *Ivan Franko National University of Lviv*

Lviv, Ukraine

e-mail: ihor.borachok@lnu.edu.ua, roman.chapko@lnu.edu.ua

Motivated by the classical works of Ya. B. Lopatynskyi on fundamental solutions of elliptic systems [1], we consider scalar evolution problems for $au_{tt} + bu_t = \Delta u$ in $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{D}$, where Ω_0 is a half-space or an infinite layer and D is a bounded cavity. A finite-difference time semi-discretization or a Fourier-Laguerre transform reduces the problem to

$$\Delta u_n - \gamma^2 u_n - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n,m} u_m = 0,\ \gamma^2 > 0,\ n = 0, \dots, N.$$

We construct a Green's fundamental sequence satisfying this recurrence and a homogeneous Dirichlet or Neumann condition on the canonical boundary. For a half-space, it is obtained from the radial free-space sequence $\{\Phi_n\}$ by the method of images $G_n^D(x,y) = \Phi_n(x,y) - \Phi_n(x,y^*)$ and $G_n^N(x,y) = \Phi_n(x,y) + \Phi_n(x,y^*)$. For an infinite layer, the corresponding image series covers all combinations of these conditions and converges geometrically due to $\gamma^2 > 0$. Nonhomogeneous canonical-boundary data are removed by a known lifting based on a difference Green sequence. The stationary problems are solved numerically by the method of fundamental solutions with collocation only on the cavity boundary. Numerical examples confirm the accuracy of the lifting and the truncated image series.

1. Lopatinskii Ya.B. *Fundamental solutions of a system of differential equations of elliptic type.* Ukr. Math. J. 1951; 3 (3): 290-316.

INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Petro I. Boyko [1] , **Halyna P. Lopushanska** [2] , **Petro Ya. Pukach** [1]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

[2] *Ivan Franko National University of Lviv Lviv, Ukraine*

e-mail: boyko.petro@gmail.com, lhp@ukr.net, petro.y.pukach@lpnu.ua

For the equation

$$ {}^cD_t^\beta u - \Delta u - \sum_{k=1}^n r_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u = F_0(x,t), \quad (x,t)\in \mathbb{R}^n\times(0,T] := Q $$

with a Caputo fractional-order derivative ${}^cD_t^\beta$ ($\beta\in(0,1)$) we are studying the inverse problem

$$ u(x,0) = F_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, $$

$$ \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_j(t)dt = \Phi_j(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad j\in\{1,\dots,n\} $$

on determining the set of functions $(u, r_1, \dots, r_n)$.

Let $C_{2,\beta}(\bar{Q}) = \{v\in C(\bar{Q}) :^c D_t^\beta v, \Delta v \in C(Q)\}$, $C_b(\bar{Q})$, and subsequently $C_b(\mathbb{R}^n)$, is the space of continuous bounded functions on $\bar{Q}$ and $\mathbb{R}^n$, respectively.

Theorem 1. Let $F_0\in C_b(Q)$ and be locally Hölder continuous with respect to the spatial variables for each $t\in(0,T]$, $F_1\in C_b(\mathbb{R}^n)$ and be locally Hölder continuous; Φ_j be twice continuously differentiable with bounded derivatives, and $\Delta\Phi_j$ be locally Hölder continuous; $|\Phi(x)| := det\big(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}\big)_{i,j=1}^n \neq 0$, $x\in\mathbb{R}^n$; $\eta_k\in C^1[0,T]$, $\eta_k(t)>0$, $\eta_k(t)$ and $t^{-\beta}\eta_k(t)$ be monotonically increasing for $t\in[0,T]$ ($k\in\{1,\dots,n\}$). Then there exists $T_1>0$ and for all $T\in(0,T_1]$ a unique solution $(u, r_1, \dots, r_n)\in C_{2,\beta}(\bar{Q})\times[C_b(\mathbb{R}^n)]^n$ to the problem.

POINTWISE ESTIMATES FOR ANISOTROPIC DOUBLE-PHASE ELLIPTIC EQUATIONS WITH ABSORPTION LOWER TERMS

Kateryna O. Buryachenko, Yuliya S. Kudrych
Vasyl' Stus Donetsk National University
Vinnytsia, Ukraine
e-mail: k.buriachenko@donnu.edu.ua, ju.kudrych@donnu.edu.ua

In the present talk we study anisotropic quasilinear double-phase elliptic equations with absorption lower term

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{g_i(|\partial_i u|)}{|\partial_i u|}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+f(u)=0,\quad u\geq 0.$$

Despite of the lack of comparison principle, we prove a priori estimates of Keller-Osserman type. Particularly, under some natural assumptions on the functions g_i, $i=1,2,...,n$, and f, we prove an estimate of the form

$$\int_0^{u(x_0)} f(s)\,ds \leq cu(x_0)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}g_i\Big(\frac{u(x_0)}{r_i}\Big),\quad x_0\in\Omega,\quad B_{8\vec{r}}(x_0)\subset\Omega,$$

for nonnegative solutions $u\geq 0$. Constant c is independent on $u(x_0)$. Using this estimate we give a simple proof of the Harnack inequality. Here $B_{\vec{r}}(x_0)\subset\Omega-$ is an anisotropic ball:

$$B_{\vec{r}}(x_0)=\prod_{i=1}^{n}\{x:\ |x_i-x_{i0}|<r_i\},\ \vec{r}=(r_1,...,r_n),\ r_i>0,\ i=\overline{1,n}.$$

This work extends the result [1] for the anisotropic case.

Acknowledgment. Yuliya Kudrych is supported of the National Research Foundation of Ukraine (NRFU), project no. 2025.06/0090, state registration no. 0125U003181.

1. Buryachenko K. *Harnack inequality for quasilinear elliptic equations with (p,q) growth conditions and absorption lower order term*. Electronic J. Diff. Equat. 2018 (2018); 91: 1-9.

A BOUNDARY-DOMAIN NYSTRÖM METHOD FOR A FREDHOLM PIDE

Roman Chapko, Oksana Palianytsia
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: roman.chapko@lnu.edu.ua, oksana.palianytsia@lnu.edu.ua

We consider the homogeneous Dirichlet problem

$$-\Delta u(x) + \int_D k(x,y)u(y)dy = f(x),\ x \in D \subset \mathbb{R}^2,\ u|_\Gamma = 0,\ \Gamma = \partial D,$$

where D is bounded and simply connected, k is a Hölder-continuous kernel of the Fredholm integral operator, which satisfies a lower coercivity bound ensuring unique solvability and f is a given smooth function.

Put $\varphi(x) = f(x) - \int\limits_D k(x,y)u(y)dy$ and $\Phi(x,y) = (2\pi)^{-1}\ln(1/|x-y|)$.

The extended boundary-domain integral system is

$$u(x) - \int_D \Phi(x,y)\varphi(y)dy - \int_\Gamma \Phi(x,y)\psi(y)ds(y) = 0, \qquad x \in D,$$

$$\int_D k(x,y)u(y)dy + \varphi(x) = f(x), \quad x \in D,$$

$$\int_D \Phi(x,y)\varphi(y)dy + \int_\Gamma \Phi(x,y)\psi(y)ds(y) = 0, \qquad x \in \Gamma.$$

Its unknowns are u, φ and ψ. Under the stated assumptions and the non-exceptional capacity condition for Γ, the system is equivalent to the original problem and well posed in Hölder spaces.

The domain is parametrized by a family of interior curves. Smooth integrals are evaluated by product integration, while the logarithmic singularities are separated explicitly and handled by trigonometric rules. The Nyström scheme is stable and convergent for admissible quadrature families. Tests on a disk, a smooth non-affine star-shaped domain and an ellipse with a nonseparable sign-indefinite kernel show approximately second-order radial convergence.

ABOUT ELLIPTIC PROBLEMS WITH ROUGH BOUNDARY DATA

Iryna Chepurukhina, Aleksandr Murach
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine
Kyiv, Ukraine
e-mail: chepurukhina@gmail.com, murach@imath.kiev.ua

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ of class C^∞, with $n \geq 2$. We consider a general elliptic linear boundary problem of the form

$$Au = f \ \text{ in } \ \Omega, \quad B_j u = g_j \ \text{ on } \ \partial\Omega, \ \ j = 1, \ldots, \ell.$$

Here, A is a differential operator of even order $2\ell \geq 2$, and each B_j is a boundary differential operator of order $m_j \geq 0$. The case where $m := \max\{m_1, \ldots, m_\ell\} \geq 2\ell$ is possible. All coefficients of A and B_j are complex-valued C^∞ functions on $\overline{\Omega}$ and $\partial\Omega$, resp. Each g_j is supposed to be an arbitrary distribution on $\partial\Omega$.

Theorem 1. Let $p, q \in (0, \infty)$ and $s, \alpha \in \mathbb{R}$. Suppose that $s \leq m + \pi(p, n)$ (allowing any g_j to be rough) and $\alpha > m - 2\ell + \pi(p, n)$, with $\pi(p, n) := 1/p + \max\{0, (n-1)(1/p - 1)\}$. Then the mapping $u \mapsto (Au, Bu)$, with $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, extends uniquely to a Fredholm bounded operator between the following Besov spaces:

$$\big\{u \in B^s_{p,q}(\Omega) : Au \in B^\alpha_{p,q}(\Omega)\big\} \tag{1}$$

$$\text{and} \quad B^\alpha_{p,q}(\Omega) \times \prod\nolimits_{j=1}^{\ell} B^{s-m_j-1/p}_{p,q}(\partial\Omega).$$

Here, the first space is endowed with the graph quasi-norm (norm iff $p, q \geq 1$). Similar results are valid in the $q = \infty$ case and for Triebel-Lizorkin spaces. The proof relies on the fact that the interpolation between spaces of form (1) keeps their structure [1].

1. Chepurukhina I., Murach A. *Distribution spaces associated with elliptic operators.* arXiv:2406.08150. To appear in Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5).

DIRECT AND INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR $\mathcal{PT}$-SYMMETRIC RANK-ONE PERTURBATIONS

Oles M. Dobosevych
Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine
e-mail: dobosevych@ucu.edu.ua

$\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonians describe optical, plasmonic, and optomechanical systems with balanced gain and loss [1]. In this talk, we give a complete description of the discrete spectra of Hermitian Hamiltonians under $\mathcal{PT}$-symmetric rank-one perturbations.

Let H_0 be a self-adjoint $\mathcal{PT}$-symmetric operator with simple discrete spectrum $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ satisfying $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq d > 0$, and eigenvectors v_n normalized by $\mathcal{PT} v_n = v_n$. We study the direct and inverse spectral problems for the rank-one perturbations

$$H = H_0 + \langle \cdot, \varphi \rangle \psi, \quad \mathcal{PT}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{PT}\psi = \psi.$$

By [2], the spectrum of H coincides with the zeros of $F(z) = 1 + \sum_n a_n b_n (\lambda_n - z)^{-1}$, where $a_n = \langle \varphi, v_n \rangle$ and $b_n = \langle \psi, v_n \rangle$; it is symmetric with respect to $\mathbb{R}$ counting multiplicity and has finitely many non-real points.

We first prove that the eigenvalues μ_n obey the relation $\mu_n - \lambda_n = a_n b_n t_n$ with $t_n \to 1$ as $|n| \to \infty$. We then solve the inverse problem of constructing ψ that, for fixed H_0 and φ, produces a $\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonian H with a prescribed spectrum. We show that a sequence (ν_n) is the spectrum of such an operator H iff (ν_n) is invariant under complex conjugation (counting multiplicities) and $\nu_n - \lambda_n = a_n x_n$ for some $(x_n) \in \ell^2$. Moreover, the corresponding ψ is unique iff all a_n are nonzero.

1. El-Ganainy R., et al. *Non-Hermitian physics and $\mathcal{PT}$ symmetry.* Nature Phys. 2018; 14 (1): 11-19.
2. Homa M., Hryniv R. *Spectra of $\mathcal{PT}$-symmetric operators under rank-one perturbations.* J. Phys. A: Math. Theor. 2020; 53 (37): 375202.

ERGODIC LIMITS OF BRAID WINDING FOR MEASURE-VALUED FLOWS WITH INTERACTION

Andrey A. Dorogovtsev [1], **Kateryna Hlyniana** [1,2], **Suli Liu** [2]

[1] *Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

[2] *School of Mathematics, Jilin University, Changchun, China*

e-mail: adoro@imath.kiev.ua

We study planar interacting flows $\dot{x}(u,t) = a(x(u,t),\mu_t)$ with $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}$. Under global Lipschitz assumptions, the evolution $\Phi_t : \mu_0 \mapsto \mu_t$ is a homeomorphic flow. We establish a Liouville principle that provides invariant laws of empirical measures under a divergence condition.

To study the asymptotic winding between trajectories, we introduce the mean angular-velocity observable

$$G(\mu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{x \neq y} \frac{\det(y-x,\, a(y,\mu) - a(x,\mu))}{|y-x|^2}\, \mu(dx)\mu(dy).$$

We derive the representation of the spatially averaged real winding $H(T) = \int_0^T G(\Phi_t \mu_0)\, dt$ and prove that the time-ordered k-fold averaged winding integrals satisfy $m_k(T) = H(T)^k/k!$. For an invariant law Π, we prove the ergodic limit, for Π-almost every μ_0,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{m_k(T)}{T^k} = \frac{1}{k!} \big(\mathbb{E}_\Pi[G \mid \mathcal{I}](\mu_0)\big)^k, \quad k \geq 1.$$

Here $\mathcal{I}$ is the invariant σ-field of Φ_t. The conditional expectation is the average angular velocity on the ergodic component associated with μ_0; if Π is ergodic, it equals the constant $\int G(\mu)\, \Pi(d\mu)$.

Finally, we show that under a *common Wiener perturbation* with translation-covariant interaction, trajectories are Brownian translates of deterministic ones. Thus relative winding is preserved pathwise, and its ergodic limits persist. For bounded odd pairwise interactions, we also prove that the stochastic measure flow has no invariant probability law on $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$.

APPLICATION OF THE GLOBAL DIFFEOMORPHISM THEOREM TO NONLINEAR HAMMERSTEIN EQUATIONS ON THE d-TORUS

Kaveh Eftekharinasab [1,2] **, Ivan Lastivka** [2]

[1] *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

[2] *Kyiv Aviation Institute, Kyiv, Ukraine*

e-mail: kaveh@imath.kiev.ua, ivan.lastivka@npp.kai.edu.ua

We study the Hammerstein integral equation

$$u(t) + \int_{\mathbb{T}^d} K(t,s)\,\phi(u(s))\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{T}^d, \tag{1}$$

where $K \in C^\infty(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$ is symmetric, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ with $0 \le \phi' \le \alpha$, and $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. We assume that the integral operator with kernel K is positive semi-definite on $L^2(\mathbb{T}^d)$ and maps it continuously into $C^\infty(\mathbb{T}^d)$, and that the regularity of u is controlled by that of the left-hand side of (1) (a tame regularity lift). As $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ is a non-normable Fréchet space, we work in the tame Fréchet category.

Theorem 1. Under these assumptions the operator

$$\mathcal{F}(u) = u + \int_{\mathbb{T}^d} K(\cdot, s)\phi(u(s))\,ds$$

is a smooth global diffeomorphism of $C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Hence for every $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ equation (1) has a unique solution, depending smoothly on f.

The proof uses the global diffeomorphism theorem for tame Fréchet spaces [2]. The tame regularity lift makes $\mathcal{F}$ a local diffeomorphism (Nash-Moser [1]); the Palais-Smale condition for $u \mapsto \frac{1}{2}\|\mathcal{F}(u) - f\|_{L^2}^2$ gives the global result.

1. Hamilton R.S. *The inverse function theorem of Nash and Moser*. Bull. Amer. Math. Soc. 1982; 7 (1): 65-222.
2. Eftekharinasab K. *On the existence of a global diffeomorphism between Fréchet spaces*. Methods Funct. Anal. Topology. 2018; 26 (1): 68-75.

SOME PROBLEMS FOR COUNTABLE HYPERBOLIC SYSTEMS

Taras Firman [1] **, Volodymyr Kyrylych** [2]
[1] *Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine*
[2] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] firman@ucu.edu.ua, [2] vkyrylych@ukr.net

For mixed and nonlinear countable hyperbolic systems with two independent variables, the Cauchy problem, boundary value problems, problems without initial conditions, etc., are considered. In particular, for a system with degenerate characteristics

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} &= f_i(x,t,u,v,w), \quad i \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} &= g_j(x,t,u,v,w), \quad j \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial w_s}{\partial t} &= h_s(x,t,u,v,w), \quad s \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1}$$

with initial conditions

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad \omega_s(x,0) = z_s(t), \quad 0 \le x \le l, \quad i,s \in \mathbb{N} \tag{2}$$

and nonlinear boundary conditions for $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \gamma_i^0\left(t,(u_j(0,t))_{j\in I_0},\omega(0,t)\right), \quad i \in I_0, \\ u_i(l,t) &= \gamma_i^l\left(t,(u_j(l,t))_{j\in I_l},\omega(l,t)\right), \quad i \in I_l, \\ v_j(0,t) &= \psi_j\left(t,(u_i(0,t))_{i\in I_l},\omega(0,t)\right), \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3}$$

where $I_0 = \{i \in \mathbb{N} : \lambda_i(0,t) > 0\}$, $I_l = \{i \in \mathbb{N} : \lambda_i(l,t) < 0\}$, a theorem on the existence of a unique solution is proved. In proving the theorem, the contraction mapping principles using weight norms are applied. By performing a partition of the initial domains of problem [1-3], a theorem on global classical solvability is obtained without any smallness conditions.

Singularly perturbed infinite hyperbolic systems of the first order are also considered.

1. Firman T., Kyrylych V. *Mixed problem for countable hyperbolic systems of linear equations.* Azerbaijan J. of Math. 2015; 5 (2): 47-60.
2. Firman T., Peliushkevych O. *Mixed problem for a degenerate hyperbolic countable system of high-order equations.* Sci. Bull. Uzhhorod Univ. 2015; 2 (27): 137-144.
3. Kyrylych V., Peliushkevych O. *Global solvability of a mixed problem for a singular semilinear hyperbolic system of equations.* Mat. Studii. 2024; 61 (2): 188-193.

CONSTRUCTIVE SPECTRAL FILTER SYNTHESIS FOR LAYERED IMPEDANCE SYSTEMS

Yuriy Golovaty [1,2] **, Rostyslav Hryniv** [2]
[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[2] *Ukrainian Catholic University, Lviv, Ukraine*
e-mail: yuriy.golovaty@lnu.edu.ua, rhryniv@ucu.edu.ua

Layered media at normal incidence (dielectrics, fluids, stepped transmission lines) act as spectral filters. The engineering task is to pass waves in prescribed bands and block them in others, within tolerances, with few layers. To do so, we tune the layer impedances.

A locally periodic structure, repeating one block of layers, separates the two goals: stop-band attenuation improves exponentially with the number of blocks, while pass-band loss is fixed by the block alone. At given period, transmission is set by one real polynomial whose degree is the layer count. Admissible polynomials are characterised exactly and yield the impedances [1, 2], so design reduces to minimising loss over them at given attenuation per block.

We prove that a specification forces minimal layers and contrast and caps the period. In a model case, the best five-layer block found keeps transmission above 0.99998 in the pass band for any block count, and each further block cuts stop-band transmission about 1.9-fold. Computed designs match explicit Chebyshev-type blocks, provably optimal for one layer and conjecturally for odd counts.

1. Nazarchuk Z.T., Hryniv R.O., Synyavskyy A.T. *Reconstruction of the impedance Schrödinger equation from the modulus of the reflection coefficients*. Wave Motion. 2012; 49 (8): 719-736.
2. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. *Inverse scattering for impedance Schrödinger operators, I. Step-like impedance lattice*. J. Math. Anal. Appl. 2018; 458 (1): 71-92.

A TWO-POINT PROBLEM IN SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Iryna Klius

National University Kyiv Aviation Institute, Kyiv, Ukraine

e-mail: iryna.klius@npp.nau.edu.ua

We study a system of two partial differential equations that is not solvable for the highest time derivative,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u + \sum_{|s|\le m} A^s \frac{\partial^{|s|} u}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \qquad (1)$$

where $u = (u_1, u_2)^T$, A^s are real 2×2 matrices, L is an elliptic matrix operator of order $2l < 2m$, and u is 2π-periodic in $x \in \mathbb{R}^p$, with the conditions $u(t_1, x) = \varphi_1(x)$, $u(t_2, x) = \varphi_2(x)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$ (2). By the Fourier method, (1), (2) reduce to two-point problems for ordinary differential systems indexed by $k \in \mathbb{Z}^p$, solved via Green's matrices. We prove a necessary and sufficient condition for uniqueness, in terms of the roots $\lambda_1(k), \lambda_2(k)$ of the characteristic equation, and existence with continuous dependence on the data in spaces of functions with exponentially decaying Fourier coefficients. Solvability is conditional on lower bounds for the *small denominators* $|\lambda_j(k)|$, $|\lambda_1(k) - \lambda_2(k)|$, $|1 - \exp(2\mu_j(k)T)|$.

Theorem 1. For almost all (in the Lebesgue measure) coefficients of (1) we have $|\lambda_j(k)| > |k|^{-p-2m-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, for all but finitely many $k \in \mathbb{Z}^p$; similar bounds hold for the other small denominators. Hence (1), (2) is solvable for almost all such systems. The proofs use [1], [2] and metric Diophantine approximation [3].

1. Ptashnyk B.Y. *Ill-posed BVPs for PDEs*. Kyiv, 1984.
2. Klyus I.S., Ptashnyk B.I. *A multipoint problem for partial differential equations unresolved with respect to the higher time derivative*. Ukr. Math. J. 1999; 51 (12): 1813-1823.
3. Sprindzhuk V.G. *Metric theory of Diophantine approximations*. M., 1977.

FORCED FREQUENCY LOCKING FOR DISSIPATIVE HYPERBOLIC PDEs

Iryna Kmit [1,2]

[1] *Humboldt University of Berlin, Berlin, Germany*

[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine*

e-mail: irina.kmit@hu-berlin.de

This talk concerns the behavior of time-periodic solutions to dissipative autonomous semilinear hyperbolic PDEs under small time-periodic forcing. We show that forced frequency locking occurs in a way analogous to that known for ODEs and parabolic PDEs. However, the analysis is substantially more difficult in the hyperbolic setting. In particular, it requires nonresonance conditions that have no counterparts for ODEs or parabolic PDEs.

We derive a scalar equation that answers the central question of forced frequency locking: Which time shifts $u(t+\varphi)$ of a periodic solution $u(t)$ of the unforced equation persist under a given forcing and for which forcing periods?

This is joint work with Lutz Recke.

DISPERSION OF INTERACTING STOCHASTIC FLOWS

Kyrylo Kuchynskyi
Institute of Mathematics, NAS of Ukraine
Kyiv, Ukraine
e-mail: kkuchynskyi@imath.kiev.ua

We study stochastic differential equations with interaction [1]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t(u) = a_{\Theta_t}(X_t(u), \mu_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma_\ell(X_t(u), \Theta_t)\,\mathrm{d}B_t^\ell, \\ \mu_t = \mu_0 \circ X_t^{-1}, \qquad X_0(u) = u, \qquad \Theta_t = \int \Phi(x)\,\mu_t(\mathrm{d}x), \\ a_\theta(x,\nu) = b(x,\theta) + \int F(x,z,\theta)\,\nu(\mathrm{d}z). \end{cases}$$

Here μ_0 is a probability measure on $\mathbb{R}^d$ with finite second moment, $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$, and the independent Brownian motions B^ℓ. Assume b, F, Φ and $\sigma = (\sigma_\ell)_{\ell\ge1}$ are globally Lipschitz, with σ taking values in $\ell^2(\mathbb{R}^d)$. Define the center $m_t = \int x\,\mu_t(\mathrm{d}x)$ and dispersion $V_t = \int |x - m_t|^2\,\mu_t(\mathrm{d}x)$.

Theorem ([2]). If, for some $\lambda > 0$ and all x, y, θ, ν,

$$2\langle x - y, a_\theta(x,\nu) - a_\theta(y,\nu)\rangle + \\ + \sum_{\ell=1}^{\infty} |\sigma_\ell(x,\theta) - \sigma_\ell(y,\theta)|^2 \le -\lambda |x-y|^2,$$

then $\mathbb{E}V_t \le e^{-\lambda t} V_0$ for every $t \ge 0$.

Example. For the scalar Ornstein-Uhlenbeck-type model

$$\mathrm{d}X_t(u) = -\alpha(X_t(u) - m_t)\,\mathrm{d}t + \beta X_t(u)\,\mathrm{d}B_t$$

if $2\alpha > \beta^2$, equality holds: $\mathbb{E}V_t = e^{-(2\alpha-\beta^2)t} V_0$.

1. Dorogovtsev A.A. *Measure-valued processes and stochastic flows*. Berlin: De Gruyter, 2023.
2. Kuchynskyi K. *Jacobian bounds, functional inequalities, and dispersion for stochastic differential equations with interaction*. Theory of Stoch. Processes. 2026; 30 (46) (1): 15-32.

DETERMINISTIC AND MONTE-CARLO APPROXIMATION SCHEME FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERACTION

Kateryna M. Kustarova
Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine
Kyiv, Ukraine
e-mail: katekustareva@gmail.com

We consider the stochastic differential equation with interaction introduced by A.A. Dorogovtsev [1, 2]:

$$\begin{gathered} dx(u,t) = a\big(x(u,t),\mu_t\big)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b\big(x(u,t),\mu_t,p\big)\,W(dp,dt), \\ x(u,0) = u, \qquad u \in \mathbb{R}^d, \qquad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{gathered} \tag{1}$$

Here W is a Wiener sheet on $\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)$,

$$a : \mathbb{R}^d \times M_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d, \qquad b : \mathbb{R}^d \times M_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d},$$

and $p \mapsto b(x,\mu,p)$ belongs to $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times d})$ for every (x,μ). For each u, the process $x(u,\cdot)$ is the trajectory of the particle starting from u, while μ_t is the image of the initial mass distribution under the random map $u \mapsto x(u,t)$. Thus, the coefficients at time t depend on both the position of an individual particle and the current mass distribution of the entire system.

Some properties of the solutions are considered.

1. Dorogovtsev A.A. *Stochastic flows with interaction and measure-valued processes*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2003 (2003); 34: 2145-2162.
2. Dorogovtsev A.A. *Measure-valued processes and stochastic flows*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2023.

1D LINEAR HYPERBOLIC SYSTEMS AND THEIR CONTROLLABILITY PROPERTIES

Volodymyr Kyrylych, Andrii Mahdach
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: vkyrylych@ukr.net, andrew.magda4@gmail.com

Consider the domain

$$S_T = \big\{(t,x) : t \in (0,T),\ -kt < x < kt\big\},$$

where $T > 0$ and $k > 0$ are constants.

In this domain, we study a system of first-order linear hyperbolic partial differential equations in two independent variables:

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + \Lambda(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = A(t,x)y(t,x) + f(t,x). \qquad (1)$$

Here,

$$\Lambda(t,x) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t,x), \dots, \lambda_n(t,x)\big),$$

and the characteristic speeds satisfy

$$\lambda_1 \le \dots \le \lambda_m < 0 < \lambda_{m+1} \le \dots \le \lambda_n.$$

We consider several variants of boundary-value problems, including the following boundary conditions:

$$\begin{cases} y_-(t,kt) = u(t), \\ [3pt] y_+(t,-kt) = y^k(t), \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) = y^k(0). \end{cases} \qquad (2)$$

Here $y_-(t,x)$ and $y_+(t,x)$ denote the subvectors of $y(t,x)$ corresponding to the negative and positive eigenvalues, respectively, of the characteristic matrix $\Lambda(t,x)$ of system (1); the function $y^k(t)$ is a given smooth vector-valued function.

The function $u(t)$ is a boundary control. The controllability problem consists in choosing this control so that the generalized

solution (in the sense of [1]) to problem (1)-(2) reaches a prescribed state at time $t = T$, namely,

$$y(T, \cdot) = y^1. \tag{3}$$

This is the condition of *exact controllability*.

Using the methodology of reference [2], different cases are considered, and conditions for the controllability of generalized solutions to problem (1)-(3) are investigated. The corresponding theorems are formulated and proved.

1. Golovaty Yu., Kyrylych V., Lavrenyuk S. *Differential equations*. Lviv: LNU, 2011.
2. Hu L., Olive G. *A method to determine the minimal null control time of 1D linear hyperbolic balance laws*. J. Diff. Equat. 2025; 440 (Part 1): 113455.

ON USING LAPLACE TRANSFORM AND MFS FOR 3D PARABOLIC PROBLEMS WITH PIECEWISE-DEFINED BOUNDARY DATA

Svyatoslav Lavryk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: sviatoslav.lavryk@lnu.edu.ua

We consider the initial boundary value problem for the heat equation in a 3D domain. The Laplace transform and sinc quadrature [1] reduce it to a set of stationary problems [2], solved numerically by the method of fundamental solutions (MFS) [3].

In applications the boundary condition often follows a technological schedule (heating, holding, cooling etc.). It can be modelled by a piecewise-defined boundary function, whose Laplace image contains delayed terms, affecting the inversion accuracy.

We propose several approaches to improve the accuracy of the Laplace transform numerical inversion for such boundary functions. Numerical experiments confirm the expectations and the efficiency of the combination of the Laplace transform and the MFS.

1. Lopez-Fernandez M., Palencia C. *On the numerical inversion of the Laplace transform of certain holomorphic mappings.* Appl. Numer. Math. 2004; 51: 289-303.
2. Chapko R., Lavryk S. *On the combination of the Laplace transform and integral equation method to solve the 3D parabolic initial boundary value problem.* Axioms. 2025; 14 (9): 666.
3. Borachok I., Lavryk S. *On the comparison of the boundary integral equations method and the method of fundamental solutions for a 3D boundary value problem for the Helmholtz equation.* J. Appl. Numer. Anal. 2025; 3: 18-27.

DIMENSION REDUCTION AND ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF REACTIVE TRANSPORT IN FRACTURED POROUS MEDIA

Taras A. Mel'nyk

[1] *University of Stuttgart, Stuttgart, Germany*

e-mail: taras.melnyk@mathematik.uni-stuttgart.de

Thin branched fractures serve as preferential pathways for transport in many heterogeneous media (geological formations, biological tissues, and engineered porous or microfluidic systems), and understanding the behavior of reactive flow near fracture junctions is essential for predicting macroscopic dynamics.

A rigorous multiscale analysis will be presented for nonlinear reactive transport in a $2D$ bulk domain containing a thin branched fracture composed of branches of thickness ε connected through a junction node of diameter $\mathcal{O}(\varepsilon)$. The microscopic model couples reaction–diffusion in the bulk with advection dominated transport in the fracture. As $\varepsilon \to 0$, the fracture collapses to a graph, and the leading-order behavior is governed by a recurrent structure of limit problems: a first-order hyperbolic equation on the graph, coupled with reaction–diffusion equations in the bulk subject to nonlinear Robin conditions involving the graph solution. To capture the influence of the node geometry, we construct node-layer and corner-layer correctors. The approximation yields quantitative error estimates that depend explicitly on the corner angles of the limiting graph, revealing how geometric features of the junction shape the macroscopic transport behavior. The presentation is based on new results currently available in [1].

1. Mel'nyk T., Rohde C. *Dimension reduction and asymptotic approximation of reactive transport in a bulk domain with a branched thin fracture*, 2026. arXiv:2607.29605v1.

ON UNIQUENESS PROBLEM FOR ACCRETIVE SCRÖDINGER OPERATORS WITH COMPLEX SINGULAR COEFFICIENTS

Vladimir Mikhailets [1,2] **, Volodymyr Molyboga** [2]
[1] *King's College London*
London, United Kingdom
[2] *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*
Kyiv, Ukraine
e-mail: vladimir.mikhailets@gmail.com, vm.imath@gmail.com

In the talk we discuss the uniqueness problem for the one-dimensional Schrödinger operator associated with the formal differential expression

$$l[u] = -u'' + qu + i[(ru)' + ru'],$$

in the complex Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. The coefficients of the expression are complex-valued and satisfy

$$q = s + Q' \in H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}), \quad s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad \text{and} \quad Q, r \in L^2_{loc}(\mathbb{R}),$$

where the derivative is understood in the sense of distributions. In particular, the potential q can be a Radon measure on the line. With the help of specially selected quasi-derivatives, the expression l is treated as a quasi-differential expression. The domains of the minimal L_0 and maximal L operators associated with the expression l in the space $L^2(\mathbb{R})$ are described. We find constructive conditions on the behaviour of $\operatorname{Im} r$ near $\pm\infty$ that guarantee that $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}$ if the operator L_0 is accretive.

We prove that these conditions are sharp even in the class of differential operators with smooth real-valued coefficients. Examples are given to illustrate the main results [1].

1. Mikhailets V., Molyboga V. *Uniqueness problem for accretive Schrödinger operators with complex singular coefficients.* Bull. London Math. Soc. 2026; 58 (9): 1-27.

ON THE DISSIPATIVE ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH COEFFICIENTS INDEPENDENT OF DEGENERACY VARIABLES

Halyna S. Pasichnyk
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
Chernivtsi, Ukraine
e-mail: h.pasichnyk@chnu.edu.ua

We consider a Kolmogorov-type ultraparabolic equation with two groups of degenerate variables. The coefficients of the equation depend on the variables of the principal group and may increase as $|x| \to \infty$. The growth of the coefficients depends on a certain increasing function D, which affects the parabolicity condition of the equation. In this case, the coefficients of the equation are not differentiable. In this case, the coefficients of the equation are not differentiable, and an additional condition is imposed on the dissipation characteristic D.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Basel: Birkhäuser, 2004.
2. Pasichnyk H. *Fundamental solution of the Cauchy problem for the dissipative ultraparabolic Kolmogorov equation with coefficients independent on variable degeneration*. Bulletin of Taras Shevchenko National Univ. of Kyiv. Phys. and Math. 2025; 81 (2): 130-137.
3. Medinskyi I., Pasichnyk H. *Fundamental solution to Cauchy problem for Kolmogorov-type equation with unbounded coefficients that do not depend on degeneration variables*. Reports of the NAS of Ukraine. 2025; 3: 3-16.

STURM-LIOUVILLE PROBLEM ON A STAR GRAPH WITH ROBIN BOUNDARY CONDITIONS

Vyacheslav M. Pivovarchik [1,2] **, Alesia O. Supranovych** [2]

[1] *University of Vaasa, Vaasa, Finland*

[2] *South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky, Odesa, Ukraine*

e-mail: vpivovarchik@gmail.com,

We consider the spectral problem on a star graph with three edges:

$$-y_j'' + q_j(x)y_j(x) = \lambda^2\, y_j, \quad x \in [0; l_j], \quad j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$y_1(l_1) = y_2(l_2) = y_3(l_3), \quad q_j \in L_2[0; l_j], \quad q_j \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$y_1'(l_1) + y_2'(l_2) + y_3'(l_3) = 0, \quad y_j'(0) - b_j y_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3}$$

We assume that we know the shape of the graph and the potentials. Our aim is to find coefficients b_j using only finite numbers of eigenvalues. Let $\phi(\lambda, b_1, b_2, b_3)$ be the characteristic function of problem (1)-(3). Let λ_i ($i = \overline{1,7}$) be distinct eigenvalues of problem (1)-(3). Then we obtain the following system of 7 linear equations:

$$b_1\phi_1(\lambda_m) + b_2\phi_2(\lambda_m) + b_3\phi_3(\lambda_m) + b_1b_2\phi_{12}(\lambda_m) + b_1b_3\phi_{13}(\lambda_m) +$$

$$+ b_2b_3\phi_{23}(\lambda_m) + b_1b_2b_3\phi_{123}(\lambda_m) = \phi_0(\lambda_m), \quad m = \overline{1,7}, \tag{4}$$

where functions $\phi_0(\lambda)$, $\phi_1(\lambda)$, $\phi_2(\lambda)$, $\phi_3(\lambda)$, $\phi_{12}(\lambda)$, $\phi_{13}(\lambda)$, $\phi_{23}(\lambda)$, $\phi_{123}(\lambda)$ are determined by the shape of the graph and by potentials on the edges.

Theorem 1. The distinct eigenvalues λ_m, $m = \overline{1,7}$ can be chosen such that system (4) has a unique solution.

1. Pivovarchik V., Supranovych A. *Recovering boundary conditions for star graphs.* Proc. Inter. Geom. Center. 2026;19(2).
2. Latushkin Y., Pivovarchik V., Supranovych A. *Sturm-Lioville problems on graphs with Robin boundary conditions.* arXiv:2510.23392 (submitted to Integ. Eq. Oper. Theory).

OPERATOR SPLITTING FOR COALESCING ONE-DIMENSIONAL STOCHASTIC FLOWS

Mykola B. Vovchanskyi

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine
e-mail: vovchansky.m@gmail.com

We consider stochastic flows $\{X_{s,t}(\cdot) \mid 0 \le s \le t\}$ generated by interacting Brownian particles with common noise and external drift. Particles merge upon collision and the motion of an individual particle is governed by the SDE

$$dX_{s,t}(x) = a(X_{s,t}(x))dt + dw_{s,x}(t), \quad t \ge s, \quad x \in \mathbb{R},$$

where $w_{s,x}$ are Brownian motions with distance-dependent correlation.

Operator splitting is applied to decouple the stochastic semigroup of the driftless flow and the drift. The convergence of finite-dimensional motions, pushforward measures and associated dual flows in reverse time is obtained [3]. The rate of convergence is established in the case of the Brownian web [1-2].

1. Dorogovtsev A.A., Vovchanskii M.B. *Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web.* Commun. Stoch. Anal. 2018; 12 (1): 89-108.
2. Dorogovtsev A.A., Vovchanskii M.B. *On the approximations of point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and discretization of the initial interval.* Ukrain. Math. J. 2021; 72: 1358-1376.
3. Vovchanskyi M.B. *Splitting for some classes of homeomorphic and coalescing stochastic flows.* ESAIM Probab. Stat. 2024; 28: 75-109.

LIOUVILLE-INTEGRABILITY OF CLOSED CHAINS ON THE LINE

Andriy Ya. Vus
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: andriy.vus@lnu.edu.ua

A onedimensional model of many particle system is investigated for the nearest neighbor interaction. The dynamics of a 'closed' chain of n particles is described by the Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i - x_{i+1}) + W(x_1 - x_n), \qquad (1)$$

where V is called interaction potential, and W is called weak potential. Both these potentials are assumed to be even functions, vanishing at infinity according to different power laws.

For cases $n = 4$ and $n = 5$, corresponding particles can be positioned symmetrically with respect to the origin. After choosing also symmetric initial conditions, the Hamiltonian (1) takes the reduced form with 2 degrees of freedom.

The properties of potentials V and W are considered under assumption that the corresponding reduced system has the first integral, polynomial of prescribed degree in the momenta. The functional equations for these potentials are obtained. It has been proven that there are no non-trivial solutions to those equations if interaction potential V has a pole at zero.

1. Liu Y.J., Wang H.A., Chang X.K. et al. *Integrable variants of the Toda lattice.* J. Nonlin. Sci. 2024; 34: Article 98.

MFS WITH GREEN FUNCTION KERNELS FOR LINEAR FREE-SURFACE PROBLEMS IN TANKS AND CHANNELS

Yurii Yanchynskyi
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: yurii.yanchynskyi@lnu.edu.ua

We consider the numerical solution of a nonstationary linear free-surface problem in tanks and channels, where the evolution on the free surface is governed by the Dirichlet-to-Neumann operator of the domain [1]. A two-step approach is used. First, the time dependence is treated by the Laguerre polynomial transform, reducing the problem to a recurrent sequence of stationary mixed boundary value problems for the Laplace equation that differ only in their right-hand sides. Second, these problems are solved by the method of fundamental solutions using Neumann Green functions of suitable reference domains as MFS kernels.

For tank geometries we use reduced Neumann Green kernels, whereas for channels we use the standard Neumann Green functions. In the canonical geometries, the kernel incorporates the homogeneous Neumann condition on the rigid part of the boundary, so that only the free-surface condition is collocated. The resulting systems are therefore smaller than in the free-space MFS formulation. The recurrent problems share a time-independent matrix, which is assembled and factorized once.

Numerical results are obtained for the canonical tank and channel geometries and for a three-dimensional perturbed-bottom configuration.

1. Borachok I., Chapko R., Yanchynskyi Y. *Two-step MFS-based numerical approaches for 3D linear sloshing.* Research in Mathematics. 2026; 13 (1): 2711512.

SPECTRAL PROBLEM ON CONNECTED GRAPHS AND ITS APPLICATION

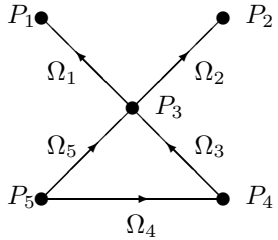
Dariia V. Yatseniak [1,2] **, Oleh M. Buhrii** [1]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*

[2] *Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine*

e-mail: dariia.yatseniak@lnu.edu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua

Let $\mathtt{G} := (\mathtt{V}, \mathtt{E})$ be a simple connected directed graph, for example, with the vertices $P_j \in \mathtt{V}$ and edges $\Omega_i \in \mathtt{E}$, $i, j = \overline{1,5}$ (see Fig. 1). Each edge Ω_i is parameterized by the interval $(0, \ell_i)$, $\ell_i > 0$. The vertex set $\mathtt{V}$ consists of the internal vertices $\mathtt{V}_{int} = \{P_3, P_4, P_5\}$ and the boundary vertices $\mathtt{V}_{ext} = \{P_1, P_2\}$.



- P_1 – the Dirichlet condition
- P_2 – the Neumann condition
- P_3, P_4, P_5 – the Kirchhoff conditions

Fig. 1. Model of the graph $\mathtt{G}$.

On the graph $\mathtt{G}$, we consider the eigenvalue problem for the function $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^5)$ and spectral parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, where each component ψ^i satisfies the equation

$$(\psi^i)''(x) + \lambda\, \psi^i(x) = 0, \quad x \in (0, \ell_i), \quad i = \overline{1,5}.$$

At the boundary vertex P_1, the homogeneous Dirichlet condition is prescribed, while at P_2, the homogeneous Neumann condition is imposed. At the internal vertices P_3, P_4, and P_5, the continuity and the Kirchhoff conditions hold.

We study this spectral problem and apply the obtained results to proving the existence of the weak solution to some initial boundary value problem for the nonlinear parabolic equations on graphs.

НАПРЯМ 2

АНАЛІЗ ДАНИХ І МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ У ЛІНГВІСТИЦІ

Ірина Б. Базилевич, Олена А. Гавриляк
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: iryna.bazylevych@lnu.edu.ua, olena.havrylyak@lnu.edu.ua

У цій роботі досліджуються тексти англійською, німецькою і французькою мовами на однорідність довжини слів.

Буде реалізовано застосування критерію однорідності χ^2. Для дослідження було сформовано 10 вибірок, кожна з яких містила текстові дані англійською, німецькою та французькою мовами. Вибір текстів здійснювався таким чином, щоб забезпечити однакові умови обробки (шрифт, розмір символів, міжрядковий інтервал), що дозволяє розглядати отримані вибірки як статистично порівнювані. Розглядалися слова довжиною від 1 до 10 символів. Також як окрему групу було взято слова у яких кількість букв більше 10. Для обчислення критерію було використано мову програмування Python.

Статистика критерію хі-квадрат:
40,955; 68,777; 27,724; 91,640; 166,848; 287,116; 99,603; 93,059; 174,606; 189,435; 147,293; 337,339; 171,243; 151,806;368,246;180,826; 156,516; 367,749; 181,972; 158,791; 379,191; 198,794;142,655;387,636; 185,853; 129,129; 372,983; 185,853; 161,129; 372,983.

Отримані емпіричні значення χ^2 порівняно із критичним і зроблено висновок про те, що німецька, французька і англійська мови не є однорідними за розподілом довжини слів.

ВИЯВЛЕННЯ ШКІДЛИВИХ URL-АДРЕС МЕТОДАМИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ: ОГЛЯД ПІДХОДІВ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ПОРІВНЯННЯ КЛАСИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Петро С. Венгерський, Володимир Ю. Лесик

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: petro.venherskyy@lnu.edu.ua, volodymyr.lesyk@lnu.edu.ua

Проаналізовано 27 праць із виявлення шкідливих URL-адрес методами штучного інтелекту [1, 2]. Ознаки поділяють на чотири групи: ознаки URL (лексичні, статистичні, токени), хоста, вмісту сторінки та зовнішні (WHOIS, чорні списки). Найчастіше (близько 85 % робіт) використовують ознаки URL. Переважають Random Forest, SVM та градієнтний бустинг, а з 2022 року зростає частка глибокого навчання [3].

Порівняно дев'ять моделей на трьох наборах за дев'ятьма ознаками з URL-адреси. Найвищу точність (91,19 %, 97,95 % та 84,17 %) показала модель CatBoost. Ансамбль із голосуванням трьох найкращих моделей підвищив точність на першому та третьому наборах (до 91,53 % та 84,83 %), на другому – ні.

Перспективний напрям подальшого дослідження – трансформери [3, 4], які враховують контекст усього рядка URL-адреси, але ресурсомісткі.

1. Sahoo D. et al. *Malicious URL detection using machine learning: a survey*. 2017. arXiv:1701.07179.
2. Aljabri M. et al. *Detecting malicious URLs using machine learning techniques: review and research directions*. IEEE Access, 2022.
3. Elsadig M. et al. *Intelligent deep machine learning cyber phishing URL detection based on BERT features extraction*. Electronics. 2022; 11 (22): 3647.
4. Vaswani A. et al. *Attention is all you need*. NeurIPS, 2017.

ПРО КЛЮЧОВИЙ БАГАТОДІАГОНАЛЬНИЙ ШИФР

Олег Гутік, Юрій Кузбит
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: oleg.gutik@lnu.edu.ua, yurii.kuzbyt@lnu.edu.ua

У модифікованому багатодіагональному шифрі [1] піддіагоналі блоку над $\mathbb{Z}_n$ кодуються так: $y_{j+1} \equiv y_j - x_j \pmod{n}$, де y_{j+1} – випадковий представник класу лишків у $\mathbb{Z}_N$, $N \geq n$, а ключ $(k_i, \tau_p, \sigma_a, \rho_b)$ задає лише розташування, тож вирівняні значення дають x_j без ключа. Пропонуємо $y_{j+1} \equiv \pi(y_j) - x_j$, тобто $x_j \equiv \pi(y_j) - y_{j+1} \pmod{n}$, де π – секретна перестановка $\mathbb{Z}_N$, не тотожна (інакше це рекурентність [1]) і не зсув.

Теорема. Нехай біти незалежні й рівномірні. Перестановки генеруються тасуванням Фішера–Єйтса з вибором індексів методом відхилення; тотожна й циклічні зсуви відкидаються. Множину з p різних цілих $k_i \geq 2$ із сумою $l \geq p(p+3)/2$ вибирають рівномірно і рівномірно впорядковують. Тоді $\tau_p, \sigma_a, \rho_b, \pi$ рівномірні серед допустимих перестановок S_m ($m = p, a, b, N$; $m \geq 3$), а (k_i) – серед усіх таких упорядкованих наборів.

Біти на практиці дає SHAKE256 від 256-бітного ключа, тож різних наборів параметрів не більше ніж 2^{256}. За відомого вирівнювання (його пошук – окреме питання) x_j дає $\pi(y_j) \bmod n$; у моделі незалежних рівномірних y_j очікувана кількість спостережень до появи всіх аргументів таблиці є NH_N (≈ 1568 при $N = 256$), де $H_N = \sum_{i=1}^{N} 1/i$.

1. Gutik O., Kuzbyt Y. *On the modified multi-diagonal cipher.* In: Theoretical and Applied Cybersecurity: Proc. IV All-Ukrainian Sci. and Pract. Conf. (TACS-2026). Kyiv: Inzhynirynh, 2026. P. 19-22.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТРЕС-ТЕСТУВАННЯ МЕХАНІЗМІВ ЗІСТАВЛЕННЯ ОЗНАК НА ОСНОВІ УВАГИ ЗА УМОВ ПРОГРЕСУЮЧОЇ ДЕГРАДАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

Іван Ільницький, Петро Пукач

Національний університет "Львівська політехніка"

Львів, Україна

e-mail: ivan.v.ilnytskyi@lpnu.ua, petro.y.pukach@lpnu.ua

Надійна 6DoF релокалізація камери є критично важливою для автономної робототехніки, проте продуктивність сучасних алгоритмів зіставлення ознак за умов деградації сенсорів залишається мало вивченою. Доповідь представляє результати систематичного оцінювання конвеєрів візуальної локалізації за умов стиснення JPEG, гаусового шуму та розмиття в русі.

Завдяки математичному моделюванню та декомпозиції часу виконання виявлено дві аномалії: колапс обчислень Sinkhorn у щільних матчерах (SuperGlue), де затримка зростає експоненціально до 3354.9 мс, та парадокс RANSAC у безконтекстному зіставленні (NN-mutual), який перевантажує просторові розв'язувачі на понад 87 викидів, збільшуючи час верифікації до 2099.6 мс.

Крім того, у презентованому дослідженні виявлено ефект низькочастотної регуляризації JPEG, що створює локалізовані піки точності. Аналіз фронту Парето доводить, що LightGlue усуває ці вузькі місця, підтримуючи стабільний час виконання (1013.6–1273.2 мс) та точність 10–15 см, забезпечуючи фундаментальну парадигму для проєктування вбудованих систем.

СУМІШІ БЛИЗЬКИХ ДО КРИТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА

Тарас Б. Лисецький

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: taras.lysetskyi@lnu.edu.ua

Нехай $Z_0, Z_1, \dots$ – процес Гальтона-Ватсона, а $Y_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$ – повна кількість частинок до n-го покоління включно. У роботі розглядається скінченна суміш K близьких до критичних процесів Гальтона-Ватсона, один із яких випадково вибирається з імовірностями $\pi_1, \dots, \pi_K$.

Припускається, що математичні сподівання кількості нащадків однієї частинки кожної компоненти прямують до одиниці. За відповідних умов для окремих компонент відома гранична поведінка нормованої повної кількості частинок за умови виживання до n-го покоління.

У роботі встановлено граничний розподіл нормованої повної кількості частинок випадково вибраного процесу суміші за умови виживання. Зокрема, доведено, що

$$\left. \frac{Y_n^{(r)}}{m_n^{(r)}} \right| Z_{I,n}^{(r)} > 0 \Rightarrow X,$$

де $m_n^{(r)}$ – максимальне з умовних математичних сподівань повної кількості частинок компонент суміші. Граничний розподіл має вигляд

$$\mathbb{P}(X < x) = \sum_{i=1}^{K} \widetilde{\pi}_i \mathbb{P}(c_i X_i < x),$$

де X_i – граничні випадкові величини для окремих компонент, c_i – граничні відношення відповідних нормувальних множників, а $\widetilde{\pi}_i$ – граничні умовні ймовірності вибору компонент за умови виживання.

КЕРОВАНІ МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ОБРИВОМ У ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ ВИПУСКУ ПРОДУКЦІЇ ДО МОМЕНТУ БАНКРУТСТВА

Антон М. Нос, Ярослав І. Єлейко

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: anton.nos@lnu.edu.ua, yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua

У доповіді розглядається керований марковський процес [1] $X_n = (K_n, R_n)$, де K_n – капітал, R_n – виробничий ресурс. Простір $\mathbb{X}^+ = \{(k,r) : k > 0,\ r \geq 0\}$ доповнено поглинаючим станом банкрутства ∂. Керування $a \in \mathbb{A}(x)$ визначає випуск $q(x,a) \geq 0$ та ядро переходів $P(B \mid x,a)$. Його обмеження P^+ на робочі стани є субстохастичним; $1 - P^+(\mathbb{X}^+ \mid x,a)$ – ймовірність обриву за крок.

За стаціонарної стратегії $A_n = \varphi(X_n)$ маємо марковський ланцюг із ядром P_φ. Його n-крокові переходи визначають імовірність виживання:

$$\mathbb{P}_x^\varphi\{\tau > n\} = P_\varphi^{(n)}(\mathbb{X}^+ \mid x), \quad \tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = \partial\}.$$

Мета – максимізувати очікуваний дисконтований випуск за допустимими стратегіями $\pi \in \Pi$:

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=0}^{\tau-1} \beta^n q(X_n, A_n) \right], \quad 0 < \beta < 1.$$

За обмеженого випуску та сталої множини дій, якщо для кожного a функції $q(x,a)$ та $\int_{\mathbb{X}^+} f(y) P^+(dy \mid x,a)$ неспадні за координатами x для кожної невід'ємної обмеженої неспадної f, то $V(k,r)$ неспадна за k і r [2].

1. Knopov P.S., Pepelyaeva T.V. *Controlled stochastic systems.* Cybernetics and Systems Analysis. 2024; 60 (4): 525-540.
2. Puterman M.L. *Markov decision processes.* Wiley, 1994.

МОДЕЛЬ КОЛЕКТИВНОГО СТАНУ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ У ЗАЛЕЖНИХ ПОТОКАХ ДАНИХ

Андрій Патинко, Роман Шувар

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: andriy.patinko@gmail.com, roman.shuvar@lnu.edu.ua

Розподілені, кіберфізичні та мультиагентні системи формують множини взаємозалежних потоків даних про стани своїх компонентів. Колективна аномалія [3] може виникати і тоді, коли значення кожного потоку лишаються в допустимих межах, але порушується узгодженість їхньої спільної поведінки. Крім того, нормальний режим і склад груп дрейфують у часі. Відомі підходи до виявлення багатовимірних аномалій, навчання графових структур [1] та адаптації до дрейфу [2] розглядають ці задачі окремо; у роботі розробляємо модель, що описує їх спільно.

Розглянемо потоки $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$, $i \in V(t)$. Залежності між ними задаватимемо зваженим графом $G(t) = (V(t), E(t), W(t))$, а ієрархічну організацію – змінним у часі розбиттям $\mathcal{P}(t)$ множини $V(t)$ на групи з власними підгрупами. Колективним станом групи $C \in \mathcal{P}(t)$ називатимемо трійку

$$S_C(t) = \big(X_C(t),\, W_C(t),\, \mathcal{P}_C(t)\big), \tag{1}$$

де $X_C(t)$ – значення потоків групи в ковзному вікні, $W_C(t)$ – ваги залежностей між ними, $\mathcal{P}_C(t)$ – її підгрупи нижчого рівня ієрархії.

Задача полягає в тому, щоб онлайн відносити стан кожної групи до класу «норма», «дрейф» або «аномалія». При колективній аномалії всі потоки можуть залишатися індивідуально нормальними (нормовані відхилення $|z_i(t)| \le \tau$, $i \in C$), тоді як їхня узгодженість порушується.

З цією метою досліджено поєднання двох статистик: залишку $e_C(t)$ прогнозу значень потоків групи з урахуванням графа $G(t)$

[1] та відхилення поточної структури залежностей від еталонної $D_C(t) = \|W_C(t) - \widehat{W}_C(t)\|_F$. Нормовані статистики об'єднуємо у зважену суму $s_C(t) = \alpha\, e_C(t) + (1-\alpha)\, D_C(t)$, $\alpha \in [0,1]$. Еталон $\widehat{W}_C(t)$ оновлюємо із забуванням

$$\widehat{W}_C(t+1) = (1-\lambda)\,\widehat{W}_C(t) + \lambda\, W_C(t), \qquad 0 < \lambda \ll 1, \qquad (2)$$

лише в станах «норма» і «дрейф», щоб модель не адаптувалася до аномалій [2]. Повільна узгоджена зміна поглинається оновленням (2), а різке порушення або зміна лише в одній підгрупі з $\mathcal{P}_C(t)$ за незмінних інших накопичується статистикою типу CUSUM [4]

$$g_C(t) = \max\bigl(0,\ g_C(t-1) + s_C(t) - \kappa\bigr), \qquad (3)$$

де κ і h – параметри чутливості. Стан «норма» відповідає $s_C(t) \le \kappa$, «дрейф» – $s_C(t) > \kappa$ при $g_C(t) \le h$, «аномалія» – $g_C(t) > h$. Статистики на кожному рівні ієрархії дають змогу локалізувати підгрупу з аномалією.

Для оцінювання підходу відібрано відкриті набори телеметрії груп безпілотних апаратів і промислових систем. Оскільки вони лише частково відповідають вимогам до тривалості потоків і розмітки колективних аномалій, їх доповнюємо напівсинтетичними даними з упровадженими колективними аномаліями. Підхід оцінюємо за точністю, частотою хибних спрацювань, затримкою виявлення та обчислювальними витратами.

1. Deng A., Hooi B. *Graph neural network-based anomaly detection in multivariate time series*. Proc. AAAI. 2021; 35 (5): 4027-4035.
2. Gama J., Žliobaitė I., Bifet A. et al. *A survey on concept drift adaptation*. ACM Comput. Surv. 2014; 46 (4): 44.
3. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. *Anomaly detection: A survey*. ACM Comput. Surv. 2009; 41 (3): 15.
4. Page E.S. *Continuous inspection schemes*. Biometrika. 1954; 41 (1/2): 100-115.

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОЦІНЮВАННЯ РИЗИКУ ДЛЯ СИСТЕМ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ

Іван А. Прокопишин

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: lviv.pi@gmail.com

Розглянуто стаціонарну систему захисту інформації, яка включає об'єкт захисту, вразливості, загрози та засоби захисту.

Для опису ризику втрат використано дискретну стохастичну модель [1]. За припущення незалежності атак та відомої ймовірності чи кількості атак кожного виду, кількість вдалих атак буде сумою біноміально розподілених випадкових величин. Це дозволяє записати аналітичні вирази для математичного сподівання та дисперсії втрат і сформулювати показник ризику на основі нерівності Кантеллі.

В рамках моделі отримано інтервальну оцінку показника ризику в аналітичній формі при малих приростах параметрів.

Досліджено узагальнення моделі на випадок кількох об'єктів захисту та припущення про дискретний розподіл кількості можливих атак.

Розглянуто спрощенні моделі, зокрема, коли мірою ризику є математичне сподівання випадкової величини втрат. Запропоновано спрощену уточнену модель ризику втрат на основі показника Кантеллі. Проведено порівняння з суб'єктивними дискретними шкалами оцінювання ризику.

1. Dudykevych V., Prokopyshyn I., Chekurin V., Opirskyy I., Lakh Yu., Kret T., Ivanchenko Ye., Ivanchenko I. *A multicriterial analysis of the efficiency of conservative information security systems*. Eastern-Europ. J Enterprise Tech. 2019; 3 (9) (99): 6-13.

ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА РОЗТЯГУ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ ТА ПЛАСТИЧНИМИ ЗОНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ УМОВИ ПЛАСТИЧНОСТІ ТРЕСКА-СЕН-ВЕНАНА

Микола Слободян, Лукіян Маркевич, Олег Смаль
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, lukiian.markevych@lnu.edu.ua, oleh.smal@lnu.edu.ua

Розв'язано та проаналізовано задачу про рівномірний розтяг круглої ізотропної пластини з поверхневою прямолінійною радіальною тріщиною, причому береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження у перемичці під тріщиною та на її продовженні утворилися пластичні зони, які моделюються умовами пластичності Треска-Сен-Венана.

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину, розв'язок сформульованої задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь на берегах тріщини та у пластичних зонах.

Крайові умови на межі круглої пластини вдалося задовольнити аналітично. Проведено числовий аналіз довжин пластичних зон при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ ПІД ЧАС ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ ІЄРАРХІЧНО-МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Михайло Яджак [1,2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*

e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua

У монографії [1] запропонована методика комплексного дослідження стану та процесу функціонування об'єктів складних ієрархічно-мережевих систем. Вона поєднує методи локального, агрегованого, інтерактивного та прогностичного оцінювання і використовує великі обсяги вхідних даних різних типів; значну кількість характеристик елементів системи, параметрів і критеріїв оцінювання, а також залучає різні режими функціонування. У більшості випадків вхідні дані потребують попереднього опрацювання в режимі реального часу з метою швидкого усунення спотворень. Отже, для ефективної реалізації згаданої методики потрібні значні обчислювальні ресурси та організація паралельних обчислень.

Для опрацювання вхідних даних нами запропоновано низку ефективних паралельних методів та алгоритмів цифрової фільтрації включно з використанням згорткових нейронних мереж. З метою прискорення обчислень розроблено паралельні алгоритми реалізації методів оцінювання систем, зокрема транспортних, на комп'ютерах зі спільною пам'яттю та кластерах.

1. Поліщук О.Д., Яджак М.С. *Моделі та методи комплексного дослідження складних мережевих систем та міжсистемних взаємодій*. Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2023.

ВИПАДКОВІ ЕВОЛЮЦІЇ НА РЕГЕНЕРУЮЧОМУ ПРОЦЕСІ З НЕЛІНІЙНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ЧАСУ

Оксана А. Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: oksana.yarova@lnu.edu.ua

Нехай $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t)$ – незалежні регенеруючі процеси, задані на фазовому просторі (E, B). Тоді для кожного процесу $x_i(t)$ моменти регенерації позначатимемо $\tau_i^{(k)}$.

Розглянемо дані процеси в масштабі часу $\dfrac{t}{g(\varepsilon)}$ з нормуючим множником $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді

$$x_i^{(k)}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = x_i\left(\tau_i^{(k)} + \frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$$

при

$$0 \le \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)},$$

незалежні копії процесу $x_i\Big(\dfrac{t}{g(\varepsilon)}\Big)$ на проміжку $\Big[0; \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)}\Big)$.

Нехай $(\nu_n)_{n=0}^{\infty}$ – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів $\{1, 2, \ldots, d\}$. Крім того, регенеруючі процеси і ланцюг Маркова – незалежні.

Мета роботи полягає в дослідженні випадкових еволюцій, заданих на регенеруючому процесі з нелійнійною апроксимацією часу $\dfrac{t}{g(\varepsilon)}$ при $g(\varepsilon) \to 0$.

1. Yarova O.A. *Асимптотика випадкової еволюції на регенеруючому процесі.* Системні технол. 2025; 160 (6): 37-44.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ТЕРМОПРУЖНИМ ПРОГИНОМ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА НАГРІВАЄТЬСЯ ВНУТРІШНІМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Анатолій Ясінський, Валерій Козицький, Володимир Флюд

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

e-mail: yasinskyy.anatoliy@gmail.com, vaklviv@ukr.net, volodymyr.flyud@lnu.edu.ua

Сформульовано та досліджено осесиметричну стаціонарну задачу оптимального керування термопружним прогином теплоізольованої по контуру тонкої круглої пластини, яка займає деяку область $D = \{(\rho, x) : \rho \in [0,1),\ x \in (0,1)\}$ і нагрівається внутрішніми джерелами тепла $q(\rho, x)$:

$$\Delta T(\rho, x) + q(\rho, x) = 0, \quad (\rho, x) \in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(\rho, l_i)}{\partial x} = (-1)^i q_i(\rho), \quad \rho \in [0,1), \quad l_1 = 0, \quad l_2 = 1 \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(1, x)}{\partial \rho} = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа.

Вибравши за функцію керування розподіл за радіальною координатою теплового потоку на одній із межових поверхонь пластини, наприклад верхній, розглянуто задачу мінімізації функціоналу

$$J(q_2) = \max_{0 \le \rho \le 1} |w(\rho, q_2) - \varphi(\rho)|, \tag{4}$$

де $w(\rho, q_2)$ – прогин серединної поверхні пластини; $\varphi(\rho)$ – задана функція.

Задачу про осесиметричний термопружний згин закріпленої по контуру від кута повороту тонкої круглої пластини, зумовлений температурним полем $T(\rho, x)$, розглянуто в межах теорії

Кірхгоффа-Лява [1], і її розв'язок побудовано у вигляді інтегральної залежності прогину пластини від неявно заданого температурного поля.

На основі припущення про існування у просторі неперервних функцій керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності (4), задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності, яка описується інтегральним рівнянням першого роду типу згортки. Побудовано розв'язок отриманого інтегрального рівняння і для конкретних випадків розподілу теплових джерел та значень вхідних параметрів задачі чисельно проаналізовано поведінку знайденого керування, яке забезпечує заданий розподіл прогину пластини, зокрема нульовий.

Показано також, що на основі отриманого аналітичного розв'язку інтегрального рівняння у просторі неперервних функцій можна побудувати функціональну послідовність, яка мінімізуватиме критерій оптимальності (4), у випадку, коли ряд, яким подано цей розв'язок, буде розбіжним, тобто припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності (4), порушується [2].

1. Motovilovets I.A., Kozlov V.I. *Thermoelasticity.* Kyiv, 1987.
2. Yasinskyy A., Tokovyy Y., Ierokhova O. *Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources.* J. Thermal Stresses. 2016; 39 (9): 1084-1097.

FORECASTING OF WHEAT PRICES USING WEATHER, MARKET AND SENTIMENT DATA

Maksym I. Azarov
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: maksym.azarov@lnu.edu.ua

Wheat is a staple food for billions of people, so sharp rises in its price directly threaten food security. In 2025 about 266 million people in 47 countries faced acute food insecurity, with weather extremes and economic shocks among the main drivers [1], and the Russia–Ukraine war again exposed import-dependent regions [2].

The goal of the work is to forecast wheat prices together with confidence intervals, so that humanitarian organisations and governments can plan purchases and respond to price shocks in advance.

The dataset combines wheat futures prices, weather data for the main producing regions (temperature, precipitation, drought indices), indicators of the monthly USDA WASDE report [3] (production, stocks, stocks-to-use ratio) and market sentiment, extracted from news and report texts by language models such as BERT.

Considered approaches: XGBoost, LSTM, BERT. The results will be generalized into a hybrid model of temporal and contextual data analysis.

1. https://news.un.org/en/story/2026/04/1167374.
2. Laborde D., Pineiro V. *Wheat price hikes and food security in Sub-Saharan Africa*. Nature Food. 2023; 4: 277-278.
3. Gorodecki A.A. *USDA: World agricultural supply and demand estimates*. (USDAGOV).

DATA ANALYSIS FOR PROBABILISTIC FORECASTING OF NETWORK DELAY EXCEEDANCES

O. Bedzir [1] , **I. Rozora** [1,2] , **A. Pashko** [1]

[1] *Taras Shevchenko National University of Kyiv*
Kyiv, Ukraine
[2] *National Technical University of Ukraine*
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
Kyiv, Ukraine
e-mail: [1] oleksandr.bedzir@knu.ua

Forecasting network delay is important for bandwidth adaptation in real-time communication. Of particular interest is whether the delay will exceed a specified threshold. We estimate this risk using rolling ARFIMA-GARCH models:

$$\begin{aligned} \Phi(B)(1-B)^d X_t &= a + \Theta(B)\varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \qquad \varepsilon_t = \sigma_t z_t. \end{aligned} \tag{1}$$

Here B is the lag operator and $z_t \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$.

Data analysis. Detrended fluctuation analysis and autocorrelation diagnostics assess persistence in measured delay series. For observed history $\mathcal{F}_t$, threshold τ , and horizon K , the target risk is

$$\rho_t = \mathbb{P}\left(\max_{1\le h\le K} X_{t+h} > \tau \mid \mathcal{F}_t \right). \tag{2}$$

From M joint Monte Carlo paths, the model-based estimate is

$$\widehat{\rho}_t = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}\left\{ \max_{1\le h\le K} X_{t+h}^{(m)} > \tau \right\}. \tag{3}$$

Brier scores and reliability diagrams assess forecasts; trajectory bootstrap retains dependence between overlapping windows.

Conditional-variance modelling reduces Brier scores by about 5% relative to constant-variance ARFIMA; calibration remains uneven.

A SCORE-BASED RANKING OF RACING DRIVERS FROM QUALIFYING AND RACE RESULTS

Taras M. Bokalo
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: taras.bokalo@avenga.com

Ranking drivers of racing series (e.g. F4) is not straightforward: events differ in field size and track, and some drivers fail to finish. We propose a transparent approach that turns timing and classification data into a comparable score from 0 to 100 for every driver l, event j and season k.

The method combines two components. The **qualifying score** $Qscore^l_{j,k}$ of driver l reflects the driver's best lap time relative to the pole time: the gap to pole is expressed as a ratio, the best result over all qualification sessions of the event is taken, and the ratio is normalized by the worst result in the event. The **race score** $Fscore^l_{j,k}$ reflects the finishing position relative to the number of classified drivers, averaged over all races of the event. In both cases the pole-sitter or the winner gets 100, whereas a driver who does not complete a session (DNF/DNS/DSQ) is assigned a synthetic worst result and gets 0.

The components are merged into an event score

$$Escore^l_{j,k} = 0.5\, Qscore^l_{j,k} + 0.5\, Fscore^l_{j,k}, \tag{1}$$

which is averaged if the event is held several times a season. Finally, with weights $w_{j,k} > 0$ of the n_1 events the driver took part in, the season score is

$$TotalScore^l_k = \sum_{j=1}^{n_1} w_{j,k}\, \overline{Escore}^l_{j,k} \Big/ \sum_{j=1}^{n_1} w_{j,k}, \tag{2}$$

and drivers are ranked by (2) in descending order. We discuss properties of the method and apply it to F4 data.

BANDS OF NEARLY COMPLETE TRANSMISSION OR SUPPRESSION IN A WAVEGUIDE WITH RESONATORS

Khrystyna O. Buhrii
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: khrystyna.buhrii@lnu.edu.ua

We reduce scattering problem in a waveguide with resonators to one-dimensional scattering on quantum graphs with a locally periodic structure (see e.g. [1]). Here, quantum graphs serve as a generalization of Schrödinger operators and describe scattering on metric graphs. In [2] we have considered that each resonator is a single edge graph, but now we expand the model to consider star-graphs, and derive explicit formulas for the transmission probability in the generic case.

Our main goal is to investigate how the resonator structure affects the transmission probability. In particular, given some predefined frequency range, we want to find the parameters of the resonators so that transmission probability is close to one or zero at the range. We define the optimization problem as minimization or maximization of transmission probability function when we consider band of nearly complete suppression or transmission respectively, and solve such optimization problems using computational methods and built-in tools of Python programming language.

1. Kuchment P. *Quantum graphs. I. Some basic structures.* Waves in Random Media. 2003; 14 (1): S107.
2. Buhrii Kh., Golovaty Yu., Hryniv R. *Scattering in quantum graphs with scale-invariant vertex couplings: Resonances,gaps and (quasi-)periodic transmission.* 2026. arXiv:2606.14931.

BAYESIAN ANALYSIS OF SOLUTION OF SOME HEAT CONDUCTION PROBLEM

Nataliia V. Buhrii [1] , **Oleh M. Buhrii** [2] ,
Anastasiia I. Holovenko [3] , **Oksana T. Kholiavka** [4] ,
Tetiana V. Kobylynska [5]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[2,3,5] *Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine*
[4] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine*
[5] *Zhytomyr Polytechnic State University, Zhytomyr, Ukraine*
e-mail: [1] nataliia.v.buhrii@lpnu.ua, [2] oleh.buhrii@lnu.edu.ua,
[3] anastasiia.holovenko@lnu.edu.ua, [4] oksana.kholiavka@lnu.edu.ua
[5] kebpua_ktv@ztu.edu.ua

We consider the initial-boundary value problems for the nonlinear parabolic equations. We investigate the existence, uniqueness and additional properties of the solutions of the problems.

In the model case, the considered problems have the form

$$u_t - u_{xx} + u + \alpha \int_0^t u(x,s)\, ds = f(t) \sin x, \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q_{0,T} = (0,\pi) \times (0,T)$, $T > 0$, and the function f is specified by the following table:

t	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_{N-1}
$f(t)$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_{N-1}

(3)

For example, using linear regression, an approximate solution of problem (1)-(3) is constructed, and confidence intervals for this solution are determined. The Bayesian credible intervals are obtained for the predicted values of the unknown function.

COMBINING PREFERENCE OPTIMIZATION WITH SUPERVISED TUNING FOR UKRAINIAN TRANSLATION

Ivan I. Bulka, Bohdan M. Pavlyshenko
[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: ivan.bulka@lnu.edu.ua, bohdan.pavlyshenko@lnu.edu.ua

Extending our studies of fine-tuned LLMs [1, 2] and of Direct Preference Optimization (DPO) in finance [3], we test whether DPO beats supervised fine-tuning (SFT) for a Ukrainian model. With LoRA, MamayLM-Gemma-3-4B-IT was tuned for EN-UK translation (Multi30k-uk [4]) and evaluated on 16 tasks.

SFT improved the trained direction (WMT: +8.5 BLEU), but degraded UK-to-X translation by 94%. 31.8% of references contain a non-breaking space absent in model outputs, a shortcut signal for DPO. After cleaning, DPO (even from SFT) still looped on one symbol; strong regularization removed this but erased the SFT gain. A hybrid DPO+SFT objective gave stable generation and BLEU 53.1 versus 57.5 for SFT. DPO outperformed SFT on Winogrande (+2.9–3.7 pp). Thus, DPO for Ukrainian requires auditing preference data and is most promising combined with SFT.

1. Pavlyshenko B., Bulka I. *Metric-based comparison of fine-tuned LLaMA 2 and Mixtral large language models for instruction tasks*. Electron. Inf. Technol. 2024; 26: 16-24.
2. Pavlyshenko B., Bulka I. *Parameter efficient fine-tuning and overfitting in GPT large language models: a metric-based comparison*. Electron. Inf. Technol. 2025; 30: 33-42.
3. Pavlyshenko B., Bulka I. *Fine-tuning large language models for financial applications using direct preference optimization*. Int. J. Computing. 2026; 25 (3): 488-495.
4. Saichyshyna N. et al. *Extension Multi30K: multimodal dataset in Ukrainian*. Proc. UNLP., 2023. P. 54-61.

CONVERGENCE OF A STOCHASTIC APPROXIMATION PROCEDURE IN ASYMPTOTIC SMALL DIFFUSION SCHEMA WITH SEMI-MARKOV SWITCHING

Yaroslav M. Chabanyuk, Uliana T. Khimka
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua, uliana.khimka@lnu.edu.ua

A continuous stochastic approximation procedure in an ergodic semi-Markovian environment, within the framework of asymptotically small diffusion [1], is defined by a stochastic differential equation:

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)[C(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^3))\, dt + \varepsilon^{-1} C_0(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^3))\, dt + \\ + \varepsilon^{1/2}\sigma(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^3))\, dw(t), \qquad (1)$$

where $u^{\varepsilon}(t)$ is a random evolution with small parameter of the series $\varepsilon > 0$, $x(t)$ is semi-Markovian environment [1], $w(t)$ is the Wiener process. The regression function $C_0(u; x)$ a satisfies the balance condition $\int_X \pi(dx) C_0(u; x) = 0$.

Theorem 1. If the normalizing function $a(t) > 0$ satisfies the conditions: $\int_0^{\infty} a(t)dt = \infty$, $\int_0^{\infty} a^2(t)dt < \infty$. Then, for each initial value $u^{\varepsilon}(t) = u_0 \in R^d$, solution of equation (1) at $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 is sufficiently small, coincides with the probability 1 of reaching the equilibrium point u^*, which is uniquely determined by an equation $C(u^*) = 0$: $\mathbf{P}\{lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} u^{\varepsilon}(t) = u^*\} = 1$.

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic analyses for complex evolutionary systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes.* John Wiley and Sons, 2020.

APPROXIMATION OF EXPERIMENTAL DATA AT BODY BOUNDARIES IN A DIFFUSION-CONVECTION-SORPTION MODEL WITH MAGNESIUM NEUTRALIZATION

Olha Y. Chernukha [1] **, Anastasiia Y. Chuchvara** [2] **, Yurii I. Bilushchak** [1]

[1] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[2] *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine*
e-mail: byixx13@gmail.com

In many practical problems, the functional form of boundary conditions cannot be determined solely from physical considerations; however, it can be reconstructed from experimental measure-ments taken at discrete time instants. This situation arises, in particular, when modeling and optimizing industrial water filtration systems [1]. To obtain exact or approximate analytical solutions to initial-boundary value problems, the time dependence of the boundary concentration must be represented by a sufficiently simple function. Polynomial approximation of experimental data is one approach to such reconstruction. It is shown that, for a convective-diffusion model accounting for sorption and neutralization of magnesium cations, fifth-degree polynomials ensure physically realistic solution behavior for monotonically increasing and decreasing sequences of experimental concentration values. It is established that the use of higher-degree polynomials may lead to nonphysical behavior of the initial-boundary value problem solution.

1. Chernukha O., Bilushchak Y., Chuchvara A., Gregus M., Pukach P. *Mathematical model of filtration of contaminated solution in a filter with hard water softening on experimental data at the boundary.* Sci. Reports. 2025; 15: 44384.

MODELLING OF EPIDEMIC DEVELOPMENT WITH SEMI-MARKOV SWITCHINGS

Roman Chypurko, Yaroslav Chabanyuk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: roman.chypurko@lnu.edu.ua,
yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua

We study a stochastic approximation procedure (SAP) [1] operating in a semi-Markov environment to model epidemic dynamics under regime switchings with general sojourn time distributions.

The epidemic diffusion model is described by the system:

$$da_t = c(t)\Big[\mu(X)+\gamma(X)-\gamma(X)m_t+\beta(X)a_t^2- \\ -a_t\big(\beta(X)+\mu(X)+\gamma(X)-d-d_A(1-a_t)\big)\Big]dt+\sigma_1(a_t-a^*)dw_1(t),$$

$$dm_t = c(t)\Big[\beta(X)a_t-\beta(X)a_t^2-m_t\big(\alpha(X)+\mu(X)\big)+a_t(d-d_A)\Big]dt+ \\ +\sigma_2(m_t-m^*)dw_2(t),$$

where a_t, m_t are proportions of non-consumers and non-risk consumers; (a^*, m^*) is the equilibrium point; $c(t)$ satisfies $\int_{t_0}^{\infty} c(t)dt = \infty$, $\int_{t_0}^{\infty} c^2(t)dt < \infty$; w_1, w_2 are independent Wiener processes with intensities σ_1, σ_2.

The switching parameters depend on a semi-Markov process X:

$$\mu(X) = \mu + X_\mu,\ \beta(X) = \beta + X_\beta,\ \alpha(X) = \alpha + X_\alpha,\ \gamma(X) = \gamma + X_\gamma,$$

where $\mu, \beta, \alpha, \gamma$ are baseline birth, transmission, risk transition, and recovery rates; d, d_A are mortality rates; $X_\mu, X_\beta, X_\alpha, X_\gamma$ are switching amplitudes. Under Cramer's condition, we state convergence of the procedure to (a^*, m^*).

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic analyses for complex evolutionary systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes.* John Wiley and Sons, 2020.

DEVELOPING AN INTERPRETABLE CLASSIFICATION MODEL USING SPARSE BELIEF RULE BASES AND MACHINE LEARNING

Lidiia Demkiv, Markiyan Fostyak
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: lidia.demkiv@gmail.com

Although modern machine-learning models achieve high classification accuracy on high-dimensional data, the Belief Rule Base (BRB) approach enhances interpretability by representing classification decisions through rules with associated belief degrees. Combining machine learning with sparse BRB preserves predictive performance while reducing complexity, improving interpretability [1].

In this study, we propose a data-driven approach to constructing sparse BRB classification models using Random Forest as a teacher model. The methodology includes selecting informative features, generating candidate rules from observed combinations of linguistic reference values, and estimating consequent belief degrees from the class probabilities predicted by Random Forest. Particle Swarm Optimization (PSO) is subsequently employed to compensate for potential performance degradation caused by rule reduction.

The proposed methodology aims to balance classification accuracy, fidelity, and model complexity through evaluation on synthetic datasets with controlled nonlinear dependencies. The resulting framework provides a systematic basis for transforming complex machine-learning classifiers into compact, interpretable rule-based models.

1. Gong A.at all. *Interpretability metrics and optimization methods for belief rule based expert systems.* Expert Systems with Appl. 2025; 289: 128363.

BAYESIAN INFERENCE OF THE AGGREGATED KERNEL OF TRANSITIONS IN A HIDDEN MIXTURE OF MARKOV CHAINS

Andriy Drebot
[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: andrii.drebot.amts@lnu.edu.ua

We consider Bayesian inference for the aggregated transition kernel of a discrete Markov process generated by a hidden mixture,

$$P^{-} = \sum_{m=1}^{M} \pi_m P^{(m)}.$$

Unlike the latent component matrices, this kernel is directly tied to the observable dynamics and remains an identifiable functional of the model. With Dirichlet priors for the mixture weights and component transition rows, a mean-field variational Bayes procedure yields closed-form coordinate updates and analytical expressions for the first two posterior moments of P^{-}. Because the induced posterior is generally not Dirichlet, we construct a compact Dirichlet approximation that preserves the posterior mean and reconciles coordinate-wise variance estimates through one concentration parameter. This provides an interpretable summary of uncertainty without identifying the latent components.

GEOMETRIC ACCURACY AND SPATIAL-STRUCTURAL QUALITY IN LOCAL FEATURE MATCHING

Andriy V. Fesiuk, Yuriy M. Furgala
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: andrii.fesiuk@lnu.edu.ua, yuriy.furhala@lnu.edu.ua

Researchers commonly evaluate local feature methods using matching precision and homography estimation error. However, accurate correspondences may concentrate in limited image regions or be spatially redundant. This study examines whether geometric accuracy reflects the spatial-structural quality of correspondences.

We compare SIFT, SURF, ORB, BRISK, KAZE, AKAZE, and SuperPoint on HPatches [1]. We identify geometrically correct correspondences using the ground-truth homography and evaluate their coverage uniformity, redundancy, and structural consistency [2] within the overlapping region. Spearman's rank correlation assesses their relationships with matching precision and homography error for each method, with confidence intervals obtained by resampling image sequences. Partial rank correlation controls for the number of correct correspondences. We analyze illumination and viewpoint subsets separately, focusing on disagreements between geometric and spatial evaluations.

This study aims to identify when geometric accuracy and spatial-structural quality align and when they diverge.

1. Balntas V. et al. *HPatches: a benchmark and evaluation of handcrafted and learned local descriptors.* Proc. CVPR., 2017. P. 5173-5182.
2. Fesiuk A., Furgala Yu. *Comprehensive spatial-geometric evaluation of keypoint detectors.* Electronics and Inform. Tech. 2025; 32: 67-86.

STABILITY SETS FOR PERTURBATIONS OF CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX PARTIAL NUMERATORS AND UNIT PARTIAL DENOMINATORS

Volodymyr Hladun
Lviv Polytechnic National University
Lviv, Ukraine
e-mail: volodymyr.r.hladun@lpnu.ua

We consider the problem of stability to perturbations of continued fractions of the form [1]

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1}+\ldots, \quad a_k\in\mathbb{C}, \quad k\geq 0. \tag{1}$$

Let $\{q_k\}_{k\geq 0}$ be a sequence of parameters, where all $q_k\in(0,1)$. If the series $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+q_k}{1-q_k}\prod_{m=0}^{k-1}q_m$ converges, then the sequence of sets

$$E_k=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{q_{k-1}^2}{1-q_{k-1}^2}\right|+q_k|z|\leq\frac{q_{k-1}}{1-q_{k-1}^2}\right\}, \quad k\geq 1,$$

is a sequence of stability sets for perturbations of the continued fraction (1).

In the case of a constant parameter $q_k=q\in(0,1)$, we obtain the stability set for perturbations

$$E_q=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-\frac{q^2}{1-q^2}\right|+q|z|\leq\frac{q}{1-q^2}\right\}.$$

Moreover, by varying q, the union of the stability sets forms a parabolic region

$$\mathcal{P}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|-\operatorname{Re}z<\frac{1}{2}\right\}=\bigcup_{0<q<1}E_q.$$

1. Hladun V., Dmytryshyn M. *Stability to perturbations of continued fraction approximants and applications.* Res. Math. 2025; 33 (3): 23-42.

NUMERICAL DISSIPATION AND EFFECTIVE VISCOSITY IN PARTICLE-BASED FLUID SIMULATIONS

Ostap Hrytsyshyn, Valeriy Trushevskyy, Oleksandr Terletskyy

Ivan Franko National University of Lviv

Lviv, Ukraine

e-mail: ostap.hrytsyshyn@lnu.edu.ua, valeriy.trushevsky@lnu.edu.ua, oleksandr.terletskyi@lnu.edu.ua

We formulate an energy-decay diagnostic for smoothed particle hydrodynamics (SPH) simulations using the solver in [1].

Consider unforced incompressible flow with constant density and kinematic viscosity $\nu > 0$ on the periodic domain $[0, 2\pi]^2$. For the Taylor–Green initial velocity $(\sin x \cos y, -\cos x \sin y)$, the exact kinetic energy obeys $E(t) = E(0)e^{-4\nu t}$. For particle masses m_i and numerical velocities $\mathbf{v}_i$, define

$$E_h(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\mathbf{v}_i(t)\|^2, \qquad \nu_{\text{eff}} = -\frac{\log[E_h(t_b)/E_h(t_a)]}{4(t_b - t_a)}. \quad (1)$$

Here $t_b > t_a$ and both sampled energies are positive. Positive $\nu_{\text{eff}} - \nu$ indicates excess damping over this interval.

If $|E_h(t_k)/E(t_k) - 1| \le \delta < 1$ at $k = a, b$, then

$$|\nu_{\text{eff}} - \nu| \le \frac{1}{4(t_b - t_a)} \log \frac{1+\delta}{1-\delta}. \quad (2)$$

The bound quantifies sensitivity to relative energy errors. The diagnostic complements velocity-error measures when comparing particle resolutions and time steps. Attribution to specific numerical mechanisms requires separate controlled studies.

1. Hrytsyshyn O., Trushevskyy V. *Application of IISPH for incompressible fluid dynamics simulation.* Visn. Lviv Univ. Ser. Appl. Math. Inform. 2024; 33: 55-68.

A GRAPH MODEL OF VULNERABLE SOFTWARE DEPENDENCIES IN MICROSERVICE SYSTEMS

Taras I. Kerod
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: taras.kerod@gmail.com

Software composition analysis (SCA) tools flag a service as vulnerable if a direct or transitive dependency version matches a security advisory [1]. Software risk taxonomies support the systematic identification and classification of risks across development activities [2]; however, a dependency-version match alone is insufficient to confirm an exploitable vulnerability.

We model the system at time t as a multilayer graph

$$G_t = \big(S_t \cup C_t \cup A_t,\ E_t^{\mathrm{dep}} \cup E_t^{\mathrm{call}} \cup E_t^{\mathrm{adv}}\big),$$

where S_t, C_t, A_t are services, component versions and advisories, and edges encode dependencies, calls and affected version ranges. SCA flags $(s, a) \in S_t \times A_t$ if E_t^{dep} has a path from s to a version affected by a. We define a confirmation level $\lambda_t(s, a) \in \{0, 1, 2, 3\}$: no match, version match, presence in the artifact, reachability of the vulnerable function from an entry point (possibly via E_t^{call}), each backed by timestamped evidence. The identification problem is to estimate λ_t by monitoring agents from incomplete, conflicting data with minimal warning delay and bounded false alarms.

1. Ponta S.E., Plate H., Sabetta A. *Detection, assessment and mitigation of vulnerabilities in open source dependencies.* Empir. Softw. Eng. 2020; 25 (5): 3175-3215.
2. Lyashkevych M., Rohatskyi I., Lyashkevych V., Shuvar R. *Software risk taxonomy creation based on the comprehensive development processes.* Electron. Inform. Technol. 2024; 27: 59-71.

EQUIVALENCE TESTING AND RUN-COUNT DESIGN FOR STOCHASTIC MACHINE-LEARNING EXPERIMENTS

Dmytro Knopov [1] **, Nadiya Shvai** [1,2]

[1] *National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine*

[2] *Cyclope.ai, Paris, France*

e-mail: d.knopov@ukma.edu.ua, n.shvay@ukma.edu.ua

A non-significant difference at two or three runs per method is often taken as evidence that two training methods are on par, which it is not. We treat independently trained runs as experimentalu nits and certify equivalence in a per-run metric such as AUROC within a pre-specified margin δ by two one-sided tests. With independent test draws the two-level (seed $\times$ item) model gives per-run variance $\tau^2 = \sigma^2 + \bar{v}$ (seed plus item); on a shared benchmark τ^2 is the conditional per-run variance. At true difference zero, level α and power π^*, the normal-approximation run count per method satisfies

$$n \geq 2\tau^2 \big(z_{1-\alpha} + z_{(1+\pi^*)/2}\big)^2 / \delta^2. \tag{1}$$

The shifted-t power approximation ($t_{2(n-1)}$ for z) matches certification rates on a 270-cell grid and a 1000-seed CIFAR-10 zoo within 0.05 for $n \geq 5$ at predicted power ≥ 0.2. For the four runs of [1] ($p = 0.33$, $\delta = 0.01$, $\alpha = 0.05$) the failure to certify was largely decided by the design [2]: with the variance calibrated to them, the simulated certification probability at $n = 2$ is near 3%, and the shifted-t rule calls for $n \approx 12$ at 80% power even at exact equality.

1. Knopov D. *Comparing SGLD and a fixed-noise predictor-corrector adaptation in canonical joint energy-based models on CIFAR-10*. Discover Comp. 2026; 29: Article 755.
2. Knopov D., Shvai N. *Equivalence testing and run-count design for stochastic machine-learning experiments*. 2026. arXiv:2610.23700.

FAST-SLOW AGGREGATION OF CONTEXTUAL FOOTBALL STATES

Mykhailo Kobernyk, Yaroslav Chabanyuk, Vitaliy Horlatch
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: mykhailo.kobernyk@lnu.edu.ua;
yaroslav.chabanyuk@lnu.edu.ua; vitaliy.horlatch@lnu.edu.ua

Can contextual football states be aggregated while retaining transition and shot/loss predictions? We propose a fast-slow analysis of synchronized event and tracking data from seven elite matches [1]. A fine state $X_t = (R_t, Z_t, H_t)$ combines event regime, attack-normalized pitch zone, and contextual information on defensive pressure and attacking-player presence in the penalty area.

For a finite-state continuous-time Markov chain, let $p(t)$ be the row vector of fine-state probabilities and write

$$\dot{p}(t) = p(t)Q^{\varepsilon}, \qquad Q^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}Q_{\text{fast}} + Q_{\text{slow}}.$$

If Q_{fast} mixes rapidly within clusters B_b with stationary distribution ν_b, define $\bar{p}_b(t) = \sum_{i \in B_b} p_i(t)$. Averaging gives

$$\dot{\bar{p}}(t) = \bar{p}(t)\bar{Q}, \qquad \bar{q}_{bc} = \sum_{i \in B_b} \nu_b(i) \sum_{j \in B_c} (Q_{\text{slow}})_{ij}.$$

The reduced ODE describes probabilities; individual possessions remain random jump paths. Exact lumpability requires equal rates into each destination block from fine states in one source block. We will test lumpability and scale separation before averaging. Diffusion corrections for scaled fluctuations require additional assumptions [4, 5].

Comparisons include regime, spatial, contextual, expert, and transition-based states, with football semi-Markov and Markov-compression benchmarks [2, 3]. After auditing clocks, endpoints, and

synchronization, leave-one-match-out tests will compare full and reduced trajectories and shot/loss probabilities. Event gaps are not residence times. If continuous-time assumptions fail, event-indexed prediction is the baseline. Fast-slow structure and predictive gain remain hypotheses.

1. Bassek M. et al. *An integrated dataset of spatiotemporal and event data in elite soccer*. Scientific Data, 2025.
2. Le Coz S. et al. *A Semi-Markov framework for modeling football possessions and temporal expected threat*. Scientific Reports, 2026.
3. Zhang A., Wang M. *Spectral state compression of Markov processes*. IEEE TIT., 2019.
4. Limnios N. *Stochastic systems in merging phase space*. 2005.
5. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. *Asymptotic analyses for complex evolutionary systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes*. John Wiley and Sons, 2020.

ON A ONE-DIMENSIONAL MODEL OF DIFFUSION IN A HETEROGENEOUS MEDIUM WITH MOVING MEMBRANES

Bohdan Kopytko [1] **, Roman Shevchuk** [2]

[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
[2] *Lviv Polytechnic National University,*
Lviv, Ukraine
e-mail: [1] bohdan.kopytko@gmail.com, [2] r.v.shevchuk@gmail.com

The talk is devoted to the construction and study of the properties of a two-parameter semigroup of operators associated with a time-inhomogeneous Markov process on the real line. Within intervals separated by points whose positions depend on time, the process coincides with prescribed ordinary diffusion processes, while its behavior at the endpoints of these intervals is governed by prescribed Feller conjugation conditions [1]. In the case considered, these conditions are nonlocal. Each condition contains only terms corresponding to partial reflection and possible jumps of the process from the boundary into the interiors of the regions sharing that boundary.

The central object of study is a parabolic conjugation problem to which the original problem is reduced. The distinctive features of this problem are as follows: the governing equations are Kolmogorov backward equations; the planar domains in which they are defined are curvilinear; the time-dependent functions defining the boundaries of these domains satisfy only a Hölder condition with exponent greater than $\frac{1}{2}$; and the Feller conjugation conditions contain integral terms and are nonlocal.

1. Portenko M.I. *Diffusion processes in media with membranes.* Kyiv: Institute of Math. of the NAS of Ukraine, 1995.
2. Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

ARCHITECTURE-DEPENDENT ROBUSTNESS OF NEURAL NETWORKS TO HYBRID COMPRESSION

Andrian Yu. Kozynets, Lidiia S. Demkiv
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: andrian.kozynets@gmail.com

Edge deployment of neural networks combines pruning and quantization [1], yet the combinations are chosen empirically. We model compression as a weight perturbation and seek its predictors.

Let $\Delta_T = A(T(w)) - A(w)$ for a quality functional A and an operator T perturbing weights by δ_T. For $Q \circ P$,

$$\kappa = \Delta_{Q\circ P} - \Delta_P - \Delta_Q \approx \delta_P^\top \nabla^2 A(w)\, \delta_Q, \tag{1}$$

by a second-order expansion; the chain is additive when one perturbation is small, e.g. FP16 with $\|\delta_Q\| \le 2^{-11}\|w\|$. For crest factor $c = \max|x|/\mathrm{rms}(x)$, per-tensor b-bit quantization has SQNR $\approx 6.02b + 4.77 - 20\lg c$ dB (signal-to-quantization-noise ratio).

We studied four CNNs on a 100-class ImageNet subset and Qwen2.5-1.5B on WikiText-2. (i) For 30% pruning with fine-tuning and FP16, $|\kappa| \le 0.2$ p.p. on all CNNs at $\approx$50% size reduction (58–59% zipped), as (1) predicts. (ii) Dynamic INT8 quantization of linear layers (93% of weights) leaves ConvNeXt-Tiny accuracy unchanged but raises Qwen2.5 perplexity 26-fold (14.1 $\to$ 363.6). Median crest factors of linear-layer inputs are 18 vs. 34, up to $1.9{\cdot}10^3$ in Qwen MLP down-projections; the worst 8-bit SQNR per layer is 27.3 vs. 4.7 dB. The failure is thus predictable a priori, cf. [2]. (iii) 30% pruning costs from +0.6 (DenseNet121) to −3.1 p.p. (ConvNeXt-Tiny, the largest): robustness follows path redundancy, not size. Multi-seed validation is ongoing.

1. Han S. et al. *Deep compression.* ICLR, 2016.
2. Dettmers T. et al. *LLM.int8().* NeurIPS, 2022.

ADAPTIVE DATA AUGMENTATION FOR FINE-GRAINED OBJECT RECOGNITION UNDER LIMITED LABELED DATA

Petro R. Kulyk, Roman Ya. Shuvar
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: petro.kulyk@lnu.edu.ua, roman.shuvar@lnu.edu.ua

Fine-grained object recognition distinguishes closely related categories differing only in localized details, combining low inter-class and large intra-class variation [1]. Under limited labels (e.g., for medical instruments), cropping or blur may obscure class-specific features (Fig. 1). *TrivialAugment* [2] samples a single operation and magnitude at random without conditioning on class confusion or feature preservation.

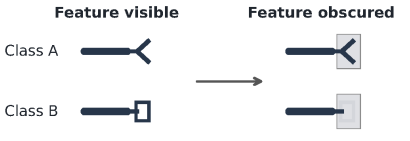


Fig. 1. Obscured feature.

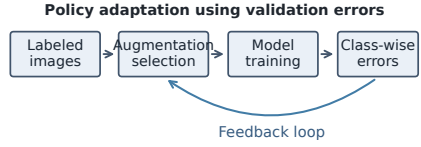


Fig. 2. Adaptive feedback loop.

Research objective. For a dataset $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ with labels $y_i \in \{1, \ldots, K\}$ and transforms $T_{a,m}(x_i)$, we formulate a class-aware policy $\pi_t(a, m \mid c)$ updated from validation confusion matrices $C^{(t)}$ while preserving discriminative regions (Fig. 2).

Proposed evaluation. Controlled experiments across small label budgets (5, 10, 20 images per class) will compare no augmentation, fixed policies, TrivialAugment, and the adaptive strategy using accuracy, macro-F1, per-class recall, and confusion matrices.

1. Wei X.-S., Wu J., Cui Q. *Deep learning for fine-grained image analysis: a survey.* 2019. arXiv:1907.03069v1.
2. Müller S.G., Hutter F. *TrivialAugment: tuning-free yet State-of-the-Art data augmentation.* Proc. ICCV, 2021.

MAINTAINING BEHAVIORAL CONSISTENCY BETWEEN SPECIFICATIONS AND AI-GENERATED SOFTWARE CHANGES

Yurii Marchuk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: yurii.marchuk@lnu.edu.ua

Keywords: behavioral consistency; AI-generated code; oracle problem; metamorphic testing; runtime verification.

1. Problem. LLM-generated changes pass tests while violating specifications, since oracles reproduce actual rather than expected behavior [4] and judge models overcorrect systematically [5].

2. Related work. Oracle-problem theory [1], metamorphic testing [2], and runtime verification [3] address parts of the challenge. Evolution-aware specification-driven monitoring [6] links specifications, implementation, and feedback, but does not directly assess behavioral consistency of AI-generated changes.

3. Objective and RQs. Ensure AI changes do not contradict specifications: **RQ1** – contracts; **RQ2** – hidden inconsistencies; **RQ3** – automated vs expert verdicts; **RQ4** – feedback impact.

4. Approach. I model *behavioral consistency* as a property of the triple $\langle \text{spec} - \text{change} - \text{behavior} \rangle$ with metrics: conformance, divergence, and semantic change.

Pipeline: spec → change → criteria → monitoring → feedback.

5. Expected results. Formal metrics; reproducible feedback-driven benchmark; guidelines for reliable AI-assisted verification [1, 5].

1. Barr E.T. et al. *Oracle Problem.* TSE. 2015; 41 (5).
2. Chen T.Y. et al. *Metamorphic Testing.* CSUR 2018; 51 (1).
3. Leucker M., Schallhart C. *Runtime Verif.* JLAP. 2009; 78(5).
4. Konstantinou M. et al. *LLM Oracles.* arXiv:2410.21136.
5. Jin H., Chen H. *LLM Overcorrection.* ASE. 2026; 33 (3).

6. Lyashkevych V. *Evolution-aware specification-driven synthesis of intelligent monitoring systems by Large Language Models*. Inform. and Math. Methods in Simulation. 2026; 16 (3): 424-432.

SEMIRING OPERATORS FOR DEPENDENCY ANALYSIS IN DIRECTED NETWORKS

Ivanna O. Melnyk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: ivannamelnyk@yahoo.com

We study edge deletion in directed graphs using semirings, where addition represents alternative walks and multiplication their concatenation [1]. Motivated by semiring derivations satisfying $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ [2], we introduce edge-dependency operators.

Let $G = (V, E)$ be a finite directed graph with distinct edge variables $X = \{x_e : e \in E\}$. A walk $e_1, \dots, e_k$ is represented by the word $x_{e_1} \cdots x_{e_k}$ in the free noncommutative semiring $\mathbb{N}_0\langle X\rangle$.

For $e \in E$, let ρ_e and D_e retain words avoiding and containing x_e, respectively. Then $f = \rho_e(f) + D_e(f)$, $D_e(fg) = D_e(f)g + \rho_e(f)D_e(g)$.

Theorem. Let R be a semiring. Then $R \times R$, with componentwise addition and multiplication $(a, b)(c, d) = (ac,\ ad + bc + bd)$, is a semiring. Every semiring homomorphism $\alpha : \mathbb{N}_0\langle X\rangle \to R$ induces a homomorphism $\widehat{\alpha}(f) = \big(\alpha(\rho_e(f)), \alpha(D_e(f))\big)$. Its kernel is the greatest congruence contained in $\ker \alpha$ and compatible with both operators.

The model provides an algebraic approach to analysing link failures in directed networks, including transportation and communication networks.

1. Mohri M. *Semiring frameworks and algorithms for shortest-distance problems.* J. Automata Lang. Combin. 2002; 7: 321-350.
2. Melnyk I.O., Andrushko A.I. *Semimodule of semiring derivations.* Sci. Bull. Uzhhorod Univ. Math. Inform. 2025; 46: 62-71.

ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF DISTRIBUTED MACHINE LEARNING ON EDGE DEVICES

Roman V. Mysiuk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: roman.mysiuk@lnu.edu.ua

The efficiency of distributed machine learning on Raspberry Pi devices is evaluated in terms of execution time, energy consumption, and learning performance. The duration of one learning round is determined by the slowest device:

$$T_{round} = \max_{1 \le i \le N} \left(\frac{m_i c_i}{f_i} + \frac{S_i}{B_i} \right).$$

The global learning objective and resource-aware optimization criterion are defined as

$$F(w) = \sum_{i=1}^{N} p_i F_i(w), \qquad p_i = \frac{|D_i|}{\sum_{j=1}^{N} |D_j|},$$

$$\min_{w} J(w) = F(w) + \lambda_E E_{total} + \lambda_T T_{round}.$$

Here, $F_i(w)$ represents the local loss function, D_i is the local dataset, and λ_E, λ_T are weighting coefficients. The model enables evaluation of learning performance, computational time, and energy efficiency under hardware constraints [1].

1. Ramadan M.N.A., Ali M.A.H., Khoo S.Y., Alkhedher M. *Federated learning and TinyML on IoT edge devices: challenges, advances, and future directions.* ICT Express. 2025; 11 (4): 754-768.

INVESTIGATION OF APPROACHES TO THE COMPREHENSIVE EVALUATION OF AMBIENT LIGHTING NORMALISATION METHODS FOR IMAGES ACQUIRED UNDER COMPLEX LIGHTING CONDITIONS

Vitalii Parubochyi
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: vitalius.parubochyi@lnu.edu.ua

Ambient lighting normalisation removes uncontrolled illumination (multiple light sources, overlapping shadows, glare, low light) while preserving scene content. Since a single input admits several plausible outputs, PSNR and SSIM on one dataset are insufficient; we match datasets and metrics to four open problems: (1) *reflectance, shading and geometry*, evaluated on Multi-Illumination [1] or similar using PSNR, SSIM, LPIPS, and DISTS; (2) *multi-source light and complex shadows*, tested on Ambient6K [2] or similar with PSNR, SSIM, LPIPS, and DISTS; (3) *fine textures*, assessed on LOL-v2 [3] or similar using SSIM, LPIPS, and DISTS; and (4) *out-of-distribution generalisation*, evaluated on ExDark [4] or similar using non-reference metrics (NIQE, BRISQUE, CLIP-IQA) and detector mAP (YOLOv8, DETR) before and after normalisation. We propose reporting scores per problem group rather than as a single average.

1. Murmann L. et al. *A dataset of multi-illumination images in the wild*. ICCV, 2019.
2. Vasluianu F.-A. et al. *Towards image ambient lighting normalization*. ECCV, 2024.
3. Yang W. et al. *Sparse gradient regularized deep Retinex network for robust low-light image enhancement*. IEEE TIP. 2021; 30: 2072-2086.
4. Loh Y.P., Chan C.S. *Getting to know low-light images with the Exclusively Dark dataset*. CVIU. 2019; 178: 30-42.

ANALYSIS OF ZERO-SHOT NAMED ENTITY RECOGNITION ON SOCIAL NETWORK POSTS

Bohdan M. Pavlyshenko, Ihor V. Drozdov
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: b.pavlyshenko@gmail.com, ihor.drozdov@lnu.edu.ua

For a specific task, a fine-tuned LLM can extract named entities [1]. Zero-shot named entity recognition (NER) models, from small encoders like GLiNER [2] to LLMs, need only entity type names; few studies weigh accuracy on noisy posts against cost.

We ran nine systems under one protocol on the WNUT-17 (1287 posts) and TweetNER7 (2807 tweets) test sets on one Apple M4 Max laptop. The table below gives F1 (%) and ms per post.

System	Params	WNUT-17	TweetNER7	ms/post
RoBERTa-large (supervised)	355M	52.0	63.5	26
GLiNER-S v2.1	153M	42.4	45.0	14
GLiNER-L v2.1	446M	37.7	43.7	65
GLiNER2.5-B	194M	36.3	38.4	24
GLiNER2.5-B + descriptions	194M	47.9	44.9	106
Qwen3-8B LLM (4-bit)	8.2B	45.6	51.4	932

We have three key findings. First, bigger is not better: the smallest GLiNER beats the largest and is five times faster. Second, type descriptions lift GLiNER2.5 (2026) by up to 11.6 F1 at 4.5 times the cost. Third, the 8B LLM leads on TweetNER7 but ties a 153M encoder on WNUT-17 at 50-80 times the cost.

1. Pavlyshenko B.M. *Analysis of disinformation and fake news detection using fine-tuned large language model.* 2023. arXiv preprint 2309.04704.
2. Zaratiana U. et al. *GLiNER: Generalist model for named entity recognition.* NAACL, 2024.

DRONE AGENT MODELING WITH LOCAL DECISION-MAKING FUNCTION

Ihor Rohatskyi
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: ihor.rohatskyi@lnu.edu.ua

Let's consider an individual drone d_i in a swarm of N drone agents [1]. Agent d_i is an autonomous system that can recognize the environment, make decisions, act, and learn over time. Its state at a time t can be represented as a vector:

$$d_i(t) = [x_i(t), v_i(t), o_i(t), T_i(t), E_i(t), \pi_i(t)] ,$$

where:

- position in the space: $x_i(t) \in R3$;
- speed vector: $v_i(t) \in R3$;
- observations from sensors (camera, LiDAR, IMU): $o_i(t)$;
- current target or task for execution: $T_i(t)$;
- energy consumption status: $E_i(t)$;
- policy (decision function) that the agent uses: $\pi_i(t)$.

The agent decides its next action based on the local state, observations, and information from the neighbours. Formally:

$$a_i(t) = \pi_i(O_i(t), C_i(t), G(t)) ,$$

where:

- local observations (computer vision results): $O_i(t)$;
- local context: $Ci(t)$;
- global/local tasks ("find an object", "block an area"): $G(t)$.

1. Rohatskiy I., Lyashkevych V. Image stitching problems in drone swarm control systems. Integration of Education, Science and Business in modern environment: Summer Debates, August 1-2, 2024. – Dnipro, 2024. – P. 29-31.

NON-IDENTIFIABILITY OF THE MARKET POTENTIAL IN THE BASS DIFFUSION MODEL

Levko O. Romanchuk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: levkoromanchuk@gmail.com

The Bass model (p , q : innovation and imitation coefficients):

$$F' = (p + qF)(1 - F), \quad F(0) = 0 \implies F(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}\, e^{-(p+q)t}}, \quad (1)$$

where F is the adopted market fraction and t is years since 2009. Nonlinear least squares on Norwegian and US EV sales shares, $y_t = m\,F(t) + \varepsilon_t$ (IEA, 2010-2025), gives m , p , q as well as

$$t^* = \frac{\ln(q/p)}{p+q}, \quad S(m) = \min_{p,\,q} \sum_t \big(y_t - m\,F(t;p,q)\big)^2. \quad (2)$$

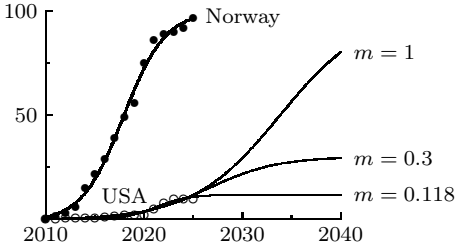


Fig. 1. Data y_t , %, and $m\,F(t)$

Table 1. Estimates

	m	R^2	t^*
Norway	1.00	0.995	2017.9
USA	0.118	0.969	2021.3
with m fixed:			
USA	0.3	0.945	2026.5
USA	1	0.936	2033.8

In Norway t^* matches the 49 % crossing in 2018; the 2021-2025 hindcast MAPE is 3.0 % . In the USA R^2 barely depends on m , but t^* shifts by 12.5 years; the 2030 forecast ranges from 12 % ($m = \hat{m}$) to 30 % ($m = 1$).

Conclusion. On an incomplete diffusion cycle the fit does not determine m , so a saturation forecast is only a scenario range.

COMBINING STATISTICAL INDICATORS TO QUANTIFY CHANGES DURING THE ADAPTIVE RESPONSE TO DRIFT

Khrystyna Shakhovska, Petro Pukach, Myroslava Vovk
Lviv Polytechnic National University
Lviv, Ukraine
e-mail: khrystyna.r.shakhovska@lpnu.ua, petro.y.pukach@lpnu.ua, myroslava.i.vovk@lpnu.ua

Drift is one of the most significant challenges in maintaining the reliability of machine learning models in dynamic environments. If left unaddressed, drift can lead to a gradual or sudden decline in prediction quality, thereby impacting decision-making, user trust, and operational efficiency. We propose the approach directly addresses this issue by implementing an adaptation mechanism that accounts for the severity of the drift. By combining a set of complementary statistical metrics into a unified severity score, a method has been developed to enable informed decisions regarding when and how to adapt the model. This selective adaptation—distinguishing between minor, moderate, and severe drift-ensures that model updates occur only when necessary, reducing computational and retraining costs without compromising prediction accuracy.

This approach not only optimizes resource utilization but also enhances operational stability. For instance, in real-world scenarios where model retraining entails significant financial or time costs, the ability to defer updates during minor drift can yield substantial efficiency gains. At the same time, the system remains vigilant regarding severe drift, where rapid intervention is critical to preventing a significant degradation in performance. The ability to configure threshold values—which can be either fixed or statistically adaptive over time—further enhances the reliability of this approach across various application domains.

EVALUATING CROSS-LINGUAL SEMANTIC CONSISTENCY IN UKRAINIAN-ENGLISH TEXT EMBEDDINGS

Mykola I. Stasiuk
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: mykola.stasiuk@lnu.edu.ua

Multilingual text embeddings support semantic comparison across languages, but accurate translation retrieval does not necessarily imply that relationships between documents are preserved. This study proposes an evaluation of this distinction for Ukrainian and English news texts.

A corpus of approximately 500 Ukrainian texts and their English translations will be encoded using LaBSE [1], multilingual E5 [2], and BGE-M3 [3]. Cross-lingual alignment will be measured through bidirectional translation retrieval using Recall@1 and mean reciprocal rank. To assess semantic structure, within-language cosine similarity matrices will be compared using Spearman's rank correlation. Nearest-neighbor overlap will provide an additional measure of relationship preservation.

The study is expected to reveal whether models that retrieve translations accurately also preserve broader semantic relationships. The findings may inform model selection for bilingual retrieval and semantic text analysis.

1. Feng F., Yang Y., Cer D., Arivazhagan N., Wang W. *Language-agnostic BERT sentence embedding.* Proc. ACL, 2022. P. 878-891.
2. Wang L. et al. *Multilingual E5 text embeddings: a technical report.* 2024. arXiv:2402.05672.
3. Chen J. et al. *BGE M3-embedding: multi-lingual, multi-functionality, multi-granularity text embeddings through self-knowledge distillation.* 2024. arXiv:2402.03216.

GOVERNING EQUATIONS OF THE ELASTICITY PROBLEMS IN MULTILAYER MEDIA

Yuriy V. Tokovyy

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine

Lviv, Ukraine

e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

The construction of analytical and semi-analytical solutions to elasticity problems for continuously inhomogeneous bodies remains challenging for classical boundary-value methods when the spatial distributions of material properties are unknown, since the governing differential equations involve variable coefficients whose functional forms are not specified a priori. One promising approach to this problem is the direct integration method [1]. This method relies on stress relations obtained by satisfying the equilibrium equations exactly, while the stress compatibility equations are reduced to integral equations of the second kind using the approach proposed by Ya. B. Lopatynsky [2]. However, extending this approach to multilayer bodies, in which material properties exhibit discontinuities at layer interfaces, presents considerable difficulties because it requires the use of generalized differentiation techniques.

This talk proposes an approach to addressing this problem by applying the direct integration method to the governing differential equations formulated in terms of strains.

1. Tokovyy Y., Ma C.-C. *The Direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids*. Newcastle: Cambridge Scholars Publ., 2021.
2. Lopatynsky Ya.B. *On an approach to reducing boundary value problems for a system of differential equations of elliptic type to the regular integral equations*. Ukr. Math. J. 1953; 5 (2): 123-151.

BAYESIAN RISK ASSESSMENT IN COMPUTER VISION-BASED UAV SYSTEMS

Iryna Tsudzenko, Yurii Tsudzenko
Ivan Franko National University of Lviv
Lviv, Ukraine
e-mail: iruna.musyk8a@gmail.com, yura9989@gmail.com

Unmanned aerial vehicle (UAV) reliability depends on visual perception, navigation, control, and environmental conditions. Image degradation, motion blur, tracking errors, and processing delays may compromise navigation and increase operational risks. Data-driven Bayesian networks have been used to identify UAV accident risk factors and their interdependencies [1].

This study proposes a probabilistic framework for assessing risks in computer vision-based UAV systems. Image quality, landmark tracking confidence, visual processing delay, and navigation telemetry form a feature vector $\mathbf{x}$ used to estimate the probability of adverse events, including navigation or control degradation.

Bayesian logistic regression models the conditional probability of a risk event:

$$P(R = 1 \mid \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x})]},$$

where $R = 1$ denotes a risk event and $\boldsymbol{\beta}$ contains the model parameters. A hierarchical Bayesian extension can account for differences across operating environments and flight modes.

The proposed workflow comprises risk event definition, indicator selection, experimental or simulated data preparation, parameter estimation, and probability prediction. Calibration, the Brier score, and logarithmic loss can be used to evaluate predictive quality. Although stationary conditions simplify risk assessment, dynamic environments require further validation.

The framework aims to identify factors associated with system degradation and support data-driven UAV reliability assessment. Its predictive performance and practical applicability must be validated using representative data.

1. Sun X., Hu Y., Qin Y., Zhang Y. *Risk assessment of unmanned aerial vehicle accidents based on data-driven Bayesian networks*. Reliability Engineering & System Safety. 2024; 248: 110185.

RELIABILITY OF SERIES REPAIRABLE SYSTEMS UNDER UNLIMITED REDUNDANCY

Yurii V. Zhernovyi, Kostiantyn Y. Zhernovyi
[1] *Ivan Franko National University of Lviv*
Lviv, Ukraine
e-mail: yuriy.zhernovyy@lnu.edu.ua,
kostiantyn.zhernovyi@lnu.edu.ua

This paper investigates the asymptotic behavior of the reliability characteristics of series repairable systems with an unlimited number of redundant units ($m \to \infty$) when the repair facility utilization factor exceeds unity ($\rho > 1$). For exponentially distributed lifetimes and repair times of the units, using the results of [1], it is shown that the mean time to failure of the system tends to infinity as $m \to \infty$, whereas the mean time between failures has a finite limiting value determined by the system parameters. In addition, the stationary availability of the system converges to the limiting value $1/\rho$. For the case of a single repair channel and an arbitrary distribution of unit repair times, using the results of [2], it is shown that, as $m \to \infty$, the stationary availability of the system converges to the same limiting value $1/\rho$.

1. Zhernovyi Yu., Kopytko B. *Formulas for average transition times between states of the Markov birth-death process.* J. Appl. Math. Comput. Mech. 2021; 20 (4): 99-110.
2. Zhernovyi K., Zhernovyi Yu. *Potentials method for single-channel stochastic systems with Threshold-Based operating strategies.* Zhytomyr: FOP Gembarskyi O. P., 2025.

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Національний університет "Львівська політехніка"

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Друга всеукраїнська наукова конференція

"Диференціальні рівняння і аналіз даних"

присвячена 120-річчю

академіка Я. Б. Лопатинського

та 80-річчю професора С. П. Лавренюка

19 – 21 листопада, 2026, Львів, Україна